TD d'optique géométrique - 2013

Série 4, SM_2, SMP_2, SMC_2

Exercice 1

Une lentille mince équiconvexe est réalisée en verre d'indice n = 3/2, le rayon de courbure des faces est R = 12 cm.

1- Trouver la distance focale image de la lentille lorsqu'elle est dans l'air, en déduire sa nature.
2- Préciser les caractéristiques de l'image d'un point objet réel situé sur l'axe optique à une distance de 24 cm de la lentille.

Exercice 2

Une lentille mince L plongée dans l'air, de centre optique O et de distance focale image f', donne d'un **objet réel** AB une **image** A'B', **droite** et **plus petite** que l'objet. On pose $p = \overline{OA}, p' = \overline{OA'}$ et γ le grandissement linéaire de L.

1- Ecrire la relation de conjugaison avec origine au centre optique de cette lentille mince, et donner l'expression de f' en fonction de p et γ. En déduire la nature de L. Expliquer.
2- Calculer f' et p' si γ = 0,5 et l'objet AB est placé à 6 cm de la lentille.

Tracer, à l'échelle unité, l'image A'B' de cet objet AB à travers la lentille mince L.

Exercice 3

Un doublet de lentilles minces (L_1, L_2), placé dans l'air, a pour symbole (3, 2, 1) et pour distance focale image f ' = 24 mm.

1) Calculer les distances focales f'_1 et f'_2 des deux lentilles, ainsi que la distance $e = O_1O_2$.

2) Déterminer la position et la nature des points cardinaux (F, F', H, H').

On donnera, en valeur algébrique : O_1F, O_1H, O_2F' et O_2H'.

3) Déterminer la position des points nodaux et du centre optique O du doublet.

4) Retrouver par construction la position des points cardinaux (F, F', H, H'). Utiliser une construction à l'échelle (1 cm→0.8 cm) et vérifier les résultats du 2).

5) A quelle condition ce doublet devient-il afocal ?

6) Représenter les points cardinaux (F, F', H, H') sur l'axe optique et construire l'image A'B' d'un objet AB situé sur O_1.

7) Par application de la relation de conjugaison de position et de grandissement d'un système centré, avec origine aux points principaux, calculer la position de l'image A'B' et le grandissement linéaire γ. Comparer les résultats avec la question 6. Quelle est la nature de l'image ?

Correction TD d'optique géométrique

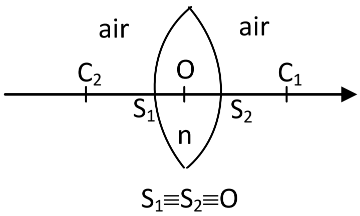
Série 4, SM_2, SMP_2, SMC_2

Exercice 1

1- La lentille mince équiconvexe étant formée par deux dioptres sphériques de sommets S_1 et S_2 confondus avec le centre optique O de la lentille puisqu'elle est mince.

La relation de conjugaison de position de cette lentille est donnée par :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$



$$R_1 = \overline{S_1C_1} = R \quad \text{et} \quad R_2 = \overline{S_2C_2} = -R$$

Le foyer image F' a pour conjugué un objet A à l'infini : $\frac{1}{\overline{OF'}} = (n-1)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right) = \frac{2(n-1)}{R}$

La distance focale image de la lentille est donc : $f' = \overline{OF'} = \frac{R}{2(n-1)}$; A.N. f' = 12 cm

f' > 0 ; la lentille équiconvexe est convergente.

2- Pour un objet réel AB situé à 24 cm de la lentille, $\overline{OA} = -24$ cm $\Rightarrow \overline{OA'} = 24$ cm

$\overline{OA'} > 0$; l'image est donc réelle.

Le grandissement linéaire est $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = -1$

L'image est donc renversée et de même grandeur que l'objet.

Exercice 2

1- $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$ ou bien en fonction de p et p' : $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$

Or $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{p'}{p} \Rightarrow p' = \gamma . p$ on a alors : $f' = \frac{\gamma . p}{1-\gamma}$

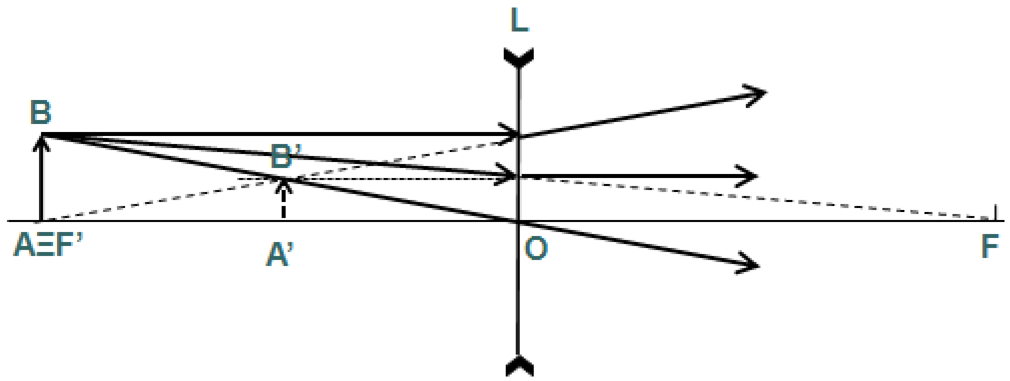
Objet AB réel $\Rightarrow$ $p < 0$

Image $A'B'$ droite $(\gamma > 0)$ et plus petite que l'objet $(|\gamma| < 1)$ $\Rightarrow$ $0 < \gamma < 1$

D'où $f' < 0$, et la lentille mince est divergente.

2- $\gamma = 0{,}5$ et $p = \overline{OA} = -6\ cm$ $\Rightarrow$ $f' = \overline{OF'} = -6\ cm$ et $p' = \gamma . p = -3\ cm$

3- **Construction, à l'échelle unité, de l'image A'B' de AB :**



Exercice 3

1- **Le symbole (3, 2, 1) de ce doublet vérifie** : $\frac{\boldsymbol{f'_1}}{\mathbf{3}} = \frac{\boldsymbol{e}}{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{f'_2}}{\mathbf{1}} = \boldsymbol{a}$.

$\Rightarrow f'_1 = \overline{O_1F'_1} = 3a \quad ; \quad f'_2 = \overline{O_2F'_2} = a \;\; ; \quad e = \overline{O_1O_2} = 2a$

a étant une constante **positive**, f'_1 et f'_2 sont donc positives et les lentilles L_1 et L_2 sont convergentes.

Formule de Gullstrand : $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2} \Rightarrow f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3}{2}a$

$\Rightarrow a = \frac{2}{3}f'$ **;** A.N. $a = 16$ mm ; $f'_1 = 48$ mm ; $f'_2 = 16$ mm ; $e = 32$ mm

2- **Position des points cardinaux**

- **Position du foyer objet F par rapport à O_1 :**

$F \xrightarrow{L1} F_2 \xrightarrow{L2} \infty$: F et F_2 sont conjugués par la lentille mince L_1

Formule de conjugaison avec origine au centre optique $\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_1F_2}} - \frac{1}{\overline{O_1F}} = \frac{1}{f'_1}$

$\Rightarrow \overline{O_1F} = \frac{\overline{O_1F_2}\, f'_1}{f'_1 - \overline{O_1F_2}}$ avec $\overline{O_1F_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = e + f_2 = e - f'_2$

($f_2 = -f'_2$ car les milieux extrêmes de L_2 sont identiques, air d'indice 1).

$\Rightarrow \overline{O_1F} = \frac{\boldsymbol{f'_1(e - f'_2)}}{\boldsymbol{f'_1 - e + f'_2}}$

- **Position de H par rapport à O_1 :** $\overline{O_1H} = \overline{O_1F} + \overline{FH} = \overline{O_1F} + f'$

$(\overline{FH} = -f = +f'$ *car les milieux extrêmes du doublet sont identiques, air d'indice* 1)

A.N. $\overline{O_1F} = 24\,mm$; $\overline{O_1H} = 48\,mm$

($\overline{O_1H} = 48$ mm $= f'_1 = \overline{O_1F'_1}$; H est donc confondu avec F'_1)

- **Position du foyer image F' par rapport à O_2 :**

$\infty \overset{L1}{\rightarrow} F'_1 \overset{L2}{\rightarrow} F'$: F'$_1$ et F' sont conjugués par la lentille mince L_2

Formule de conjugaison avec origine au centre optique $\Rightarrow \frac{1}{\overline{O_2F'}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f'_2}$

$$\Rightarrow \overline{O_2F'} = \frac{\overline{O_2F'_1}\,f'_2}{f'_2 + \overline{O_2F'_1}}$$ avec $\overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} = -e + f'_1$

$$\Rightarrow \overline{O_2F'} = \frac{f'_2(-e+f'_1)}{f'_1 - e + f'_2}$$

- **Position de H' par rapport à O_2**

$\overline{O_2H'} = \overline{O_2F'} - \overline{H'F'} = \overline{O_2F'} - f'$

A.N. $\overline{O_2F'} = 8$ mm ; $\overline{O_2H'} = -16$ mm

($\overline{O_2H'} = -16$ mm $= -\overline{O_2F'_2} = \overline{O_2F_2}$; H'est donc confondu avec F_2

- **Nature de F, F', H et H'**

$\overline{O_1F} > 0$; $\overline{O_1H} > 0$, F et H sont donc virtuels car ils se trouvent après la face d'entrée du doublet (après L_1).

$\overline{O_2F'} > 0$; $\overline{O_2H'} < 0$, F' est un foyer image réel car il se trouve après la face de sortie du doublet (après L_2), H' est un point principal image virtuel car il se trouve avant la face de sortie du doublet (avant L_2).

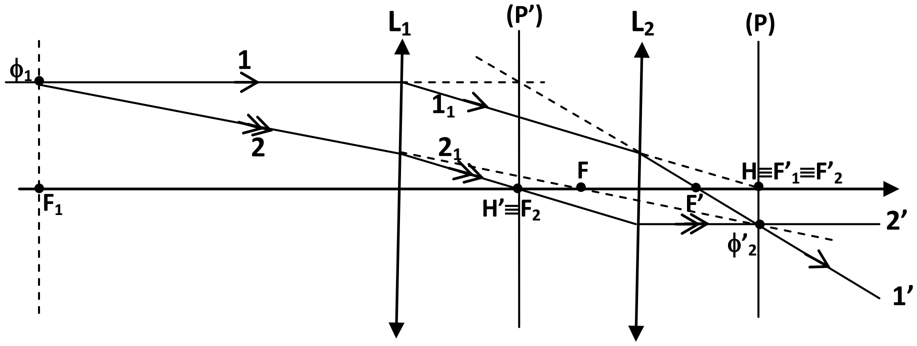
3) Position des points nodaux N et N' du doublet : $N \xrightarrow{Doublet} N' / G = 1$

Formule de Lagrange Helmoltz : $\gamma . G = \frac{n}{n'} = 1$ (milieux extrêmes du doublet identiques : air)
Or pour N et N', $G = 1 \Rightarrow \gamma = 1$
Les points nodaux sont donc confondus avec les points principaux : $N \equiv H$ *et* $N' \equiv H'$

Position du centre optique O du doublet par rapport à O_1 : $N \overset{L_1}{\rightarrow} O \overset{L_2}{\rightarrow} N'$

Relation de conjugaison de L_1 avec origine au centre optique O_1 :
$\frac{1}{\overline{O_1O}} - \frac{1}{\overline{O_1N}} = \frac{1}{f'_1} \Rightarrow \overline{O_1O} = \frac{f'_1 . \overline{O_1N}}{f'_1 + \overline{O_1N}} = \frac{f'_1 . \overline{O_1H}}{f'_1 + \overline{O_1H}}$; A.N. $\overline{O_1O} = 24$ mm
$\overline{O_1O} = \overline{O_1F} = 24$ mm **;** O est donc confondu avec F

4) Construction des points cardinaux (F, F', H, H')



a. On trace un rayon objet (1) parallèle à l'axe optique ; il est réfracté par L_1 suivant le rayon (1_1) qui passe par F'_1.

b. Le rayon annexe intermédiaire (2_1), passant par F_2 et parallèle à (1_1) est réfracté par L_2 parallèlement à l'axe optique, suivant (2').

c. Le rayon (2') coupe le plan focal image de L_2 en ϕ'_2, foyer secondaire image.

d. Les rayons (1_1) et (2_1) parallèles, se coupent, après réfraction par L_2 en ϕ'_2, d'où la construction du rayon (1').

e. L'intersection de (1') avec l'axe optique donne le foyer principal image du doublet F'.

f. L'intersection de (1) avec (1') appartient au plan principal image (P') du doublet qui coupe l'axe optique au point principal image H'.

g. Le rayon (1) coupe le plan focal objet de L_1 en ϕ_1, foyer secondaire objet.

h. Le rayon (2), objet de (2_1) par L_1, passe par ce foyer, d'où sa construction.

i. L'intersection de (2) avec l'axe optique donne le foyer principal objet du doublet F.

j. L'intersection de (2) avec (2') appartient au plan principal objet (P) du doublet qui coupe l'axe optique au point principal objet H.

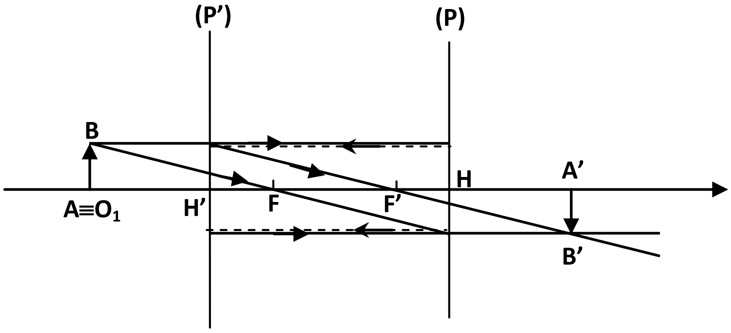
5) **Doublet afocal :** Le doublet est afocal si : $F'_1 \equiv F_2$ $(\Delta = 0)$

$$\Rightarrow e = \overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} + \overline{F_2O_2} = f'_1 + f'_2 \;;\; \text{A.N.} \;\; e = 64 \text{ mm}$$

(Ou bien : doublet afocal $\Rightarrow V = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1 f'_2} = 0 \quad \Rightarrow e = f'_1 + f'_2$)

6) Construction de l'image A'B' de l'objet AB situé sur O_1 :

$\overline{HH'} = \overline{HO_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2H'} = -32$ mm ; $f' = \overline{H'F'} = 24\,mm$ et $f = -f' = -24\,mm$



Explication :

- Le rayon incident issu de B et parallèle à l'axe se propage jusqu'à arriver sur le plan principal objet (P). On passe de (P) au plan principal image (P') en trait discontinu parallèlement à l'axe, et le rayon émerge de (P') en passant par F'.
- Le rayon incident issu de B et qui passe par F se propage jusqu'à arriver sur le plan principal objet (P). On passe de (P) au plan principal image (P') en trait discontinu parallèlement à l'axe, et le rayon émerge de (P') parallèlement à l'axe optique.
- L'intersection des deux rayons émergents donne la position de l'image A'B'.

7) Calcul de la position de A'B' :

Le système centré est placé dans l'air, la relation de conjugaison de position et de grandissement linéaire, avec origine aux points principaux, s'écrivent alors successivement:

$$\frac{n'}{\overline{H'A'}} - \frac{n}{\overline{HA}} = \frac{n'}{f'} = V \qquad \text{et} \quad \gamma = \frac{n}{n'}\frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}}$$

Où n et n' sont les indices de réfraction des milieux extrêmes pour le doublet (n = n' = 1)

et $f' = \overline{H'F'}$

On a alors : $\overline{H'A'} = \frac{f'\,\overline{HA}}{f'+\overline{HA}}$ et $\gamma = \frac{\overline{H'A'}}{\overline{HA}}$ A.N. $\overline{H'A'} = 48\,mm$ et $\gamma = -1$

Ces résultats sont conformes avec la construction précédente.

$\overline{O_2A'} = \overline{O_2H'} + \overline{H'A'} = -16 + 48 = 32\,mm > 0$

A'B' se trouve après la face de sortie du doublet (après L_2), donc c'est une image réelle. Elle est renversée car $\gamma < 0$