U.S.T.H.B
FACULTE DE MATHEMATIQUES

MI/section 3
09 Janvier 2017

EPREUVE FINALE D'ALGEBRE I

EXERCICE 1 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. Soient les ensembles: $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $B = \{2\}$.
   (a) Déterminer $f(A)$.
   (b) En déduire que f n'est pas injective; Justifier.
   (c) Déterminer $f^{-1}(B)$.
2. On désigne par $\mathcal{R}$, la relation binaire définie par:
$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x\mathcal{R}y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer la classe d'équivalence de $0, 2$ et -2.

EXERCICE 2:

Soit $n \geq 2$, on considère: $U_n = \{z \in \mathbb{C}^*;\ z^n = 1\}$.

1. Montrer que U_n est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. Que peut-on déduire?
2. Soit $\varphi_n : U_n \longrightarrow U_n$ l'application définie par $\varphi_n(z) = z^2$.
   (a) Montrer que φ_n est un endomorphisme de groupes.
   (b) Déterminer $\ker(\varphi_4)$. φ_4 est-elle injective?
   (c) Déterminer $\ker(\varphi_3)$. φ_3 est-elle injective?

EXERCICE 3:

On note par $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib \ /\ a, b \in \mathbb{Z}\}$ où i est le nombre complexe vérifiant $i^2 = -1$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[i], +, \times)$ est un sous- anneau de $(\mathbb{C}, +, \times)$. que peut-on conclure?
2. Pour $z = a + ib \in \mathbb{Z}[i]$, on note $N(z) = a^2 + b^2$.
   (a) Vérifier que: $N(z) = z\bar{z}$, où $\bar{z} = a - ib$.
   (b) Montrer que: $\forall z, z' \in \mathbb{Z}[i], \quad N(zz') = N(z)N(z')$. α
   (c) Montrer que: $\forall z \in \mathbb{Z}[i], \quad z$ inversible $\Leftrightarrow N(z) = 1$.
   (d) En déduire tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
   (e) $\mathbb{Z}[i]$ est-il un corps?

EXERCICE 4:

1. Est-ce que l'anneau $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est intègre?
2. Est-ce que $(2\mathbb{Z})$ est un sous-anneau de $(\mathbb{Z}, +, \times)$?

U.S.T.H.B.
MI/Section3

Janvier 2017.

Corrigé succint de l'Epreuve finale d'Algèbre 1.

Exercice n° 1:

1/a| $f(A) = \{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\} = \{0, 2, 4\}$. (0,5)

b| f non injective car $\exists\, -2$ et $1 \in \mathbb{R}$ tq $f(-2) = f(1) = 0$ avec $1 \neq -2$ (0,5)

c| $f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2\} = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$. (0,5)

2/a| . Soit $x \in \mathbb{R}$:

Comme $f(x) = f(x)$ alors $x R x$ alors R est réflexive. (0,5)

. Soient $x, y \in \mathbb{R}$:

$$x R y \Rightarrow f(x) = f(y)$$
$$\Rightarrow f(y) = f(x)$$
$$\Rightarrow y R x$$

Alors R est symétrique (0,5)

. Soient x, y et $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x R y \\ \text{et} \\ y R z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = f(y) \\ \text{et } f(y) = f(z) \end{cases} \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow x R z$$ (0,5)

Alors R est transitive

Enfin R est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

b| $\overline{0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x R 0\} = f^{-1}(B) = \{-\sqrt{3}, 0, +\sqrt{3}\}$. (0,5)

$\overline{2} = \{x \in \mathbb{R} / x R 2\} = \{-1, 2\}$ (0,5)

$\overline{-2} = \{x \in \mathbb{R} / x R -2\} = \{-2, 1\}$. (0,5)

Exercice n° 2:

1/ . $e_{(\mathbb{C}^*, \times)} = 1 \in U_n$ car $1^n = 1$. (0,5)

. Soient $z_1, z_2 \in U_n$:

$$(z_1 \times z_2^{-1})^n = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^n = \frac{z_1^n}{z_2^n} = \frac{1}{1} = 1$$ alors $z_1 \times z_2^{-1} \in U_n$ (1)

Alors U_n est un s-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. (0,5)

On déduit que $(U_n, \times)$ est un groupe (0,5)

2/a| Soient $z_1, z_2 \in U_n$:

$f_n(z_1 \times z_2) = (z_1 \times z_2)^2 = z_1^2 \times z_2^2 = f_n(z_1) \times f_n(z_2)$ d'où f_n est un homomorphisme de groupes. (0,5)

$\begin{cases} f_n \text{ homomorphisme de groupes} \\ \text{et } f_n : U_n \longrightarrow U_n \end{cases}$ alors f_n est un endomorphisme de groupes. (0,5)

b/ $f_4 : U_4 \longrightarrow U_4$ où $U_4 = \{1, -1, i, -i\}$.
$z \longmapsto f_4(z) = z^2$

$\ker f_4 = \{z \in U_4 / z^2 = 1\} = \{-1, 1\}$ (0,5)

f_4 non injective car $\ker f_4 \neq \{1\}$ (0,5)

$f_3 : U_3 \longrightarrow U_3$ où $U_3 = \{1, j, \bar{j}\}$.
$z \longmapsto f_3(z) = z^2$

$\ker f_3 = \{z \in U_3 / z^2 = 1\} = \{1\}$ (0,5) alors f_3 injective (0,5)

Exercice n° 3:

1/ • $1_{(\mathbb{C},+,\times)} = 1 = 1 + 0.i \in \mathbb{Z}[i]$ alors $\mathbb{Z}[i] \neq \phi$. (0,5)

• Pour a_1+ib_1 et $a_2+ib_2 \in \mathbb{Z}[i]$:

$(a_1+ib_1)+(-a_2-ib_2) = (a_1-a_2)+i(b_1-b_2) \in \mathbb{Z}[i]$ (0,5)

$(a_1+ib_1) \times (a_2+ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2+a_2b_1) \in \mathbb{Z}[i]$ (0,5)

Alors $\mathbb{Z}[i]$ est un s-anneau de $(\mathbb{C},+,\times)$ (0,5)

On déduit que $(\mathbb{Z}[i],+,\times)$ est un anneau (0,5)

2/ a/ $z.\bar{z} = (a+ib).(a-ib) = a^2+b^2 = N(z)$ (0,5)

b/ $N(z.z') = (zz')\overline{(zz')} = (zz')(\bar{z}.\bar{z}') = z.\bar{z}.z'.\bar{z}' = N(z).N(z')$. (1pt)

c/ Si z est inversible alors $\exists z' \in \mathbb{Z}[i]$ tq $z.z' = 1$

$z.z' = 1 \Rightarrow N(z.z') = N(1) = 1 \Rightarrow N(z).N(z') = 1 \Rightarrow N(z) = N(z') = 1$ car $N(z) \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, si $N(z) = 1$ et comme $N(z) = z.\bar{z}$ (1)×2

Alors: $z.\bar{z} = 1$ d'où $\exists z' = \bar{z} \in \mathbb{Z}[i]$ tq $z.z' = 1$

d'où z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$.

d/ z inversible $\Leftrightarrow N(z) = 1 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 1$

$a^2 = 1$ et $b^2 = 0$ d'où $a = \pm 1$ et $b = 0$ (1pt)

ou $a^2 = 0$ et $b^2 = 1$ d'où $a = 0$ et $b = \pm 1$

d'où les élts inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ sont : $1, -1, i$ et $-i$.

e/ Bien sur que non d'après la d/ on voit que seuls les éléments de $\mathbb{Z}[i]$ de norme $N(z) = 1$ sont inversibles (1pt)

Exercice n° 4:

1) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ non intègre car il contient des diviseurs de zéro: (1pt)

$\bar{2} \times \bar{3} = \overline{2\times3} = \bar{6} = \bar{0}$ avec $\bar{2} \neq \bar{0}$ et $\bar{3} \neq \bar{0}$.

2) $(2\mathbb{Z})$ ne peut être un s-anneau de $\mathbb{Z}$ car $1_{(\mathbb{Z},+,\times)} \notin (2\mathbb{Z})$. (1pt)