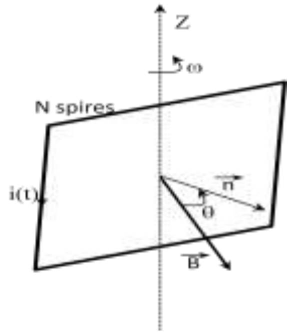
Chapitre I: Courants alternatifs sinusoïdaux

Contrairement au courant continu un courant alternatif présente de faible perte d'énergie par effet joule et peut voir ses caractéristiques (i(t), v(t)) modifiées par un transformateur à enroulement. D'où l'intérêt de ce type de courant.

I- Production et caractéristiques d'un courant alternatif sinusoïdal

1- Production d'un courant sinusoïdal

Soit une spire de section S placée dans un champ magnétique B uniforme et perpendiculaire à l'axe de rotation de celle-ci. A t=0 $\vec{B}$ et $\vec{S}$ sont colinéaires. A l'instant t le flux coupé par la spire est :



$$\phi = \vec{B}.\vec{S} = BScos(\omega t)$$

La variation du flux induit dans la spire une f.e.m :

$$e(t) = -\frac{d\phi}{dt} = BS\omega sin(\omega t)$$

et un courant induit i(t) donné par la loi d'ohm :

$$i(t) = \frac{e}{R} = \frac{BS}{R}\omega sin(\omega t)$$

i(t) est donc sinusoïdal comme la tension e(t).

2- Caractéristiques d'un courant sinusoïdal

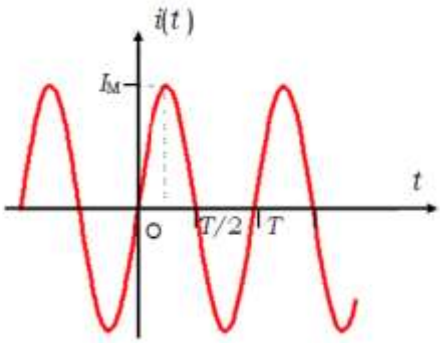
Généralement i(t) s'écrit sous la forme suivante : $i(t) = I_m cos(\omega t + \varphi)$

Avec : $I_m = I_{cc}/2$: l'amplitude du courant

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: La pulsation en rad/s

φ : angle de déphasage entre i(t) et e(t) (ou phase) s'exprime en radian

T : la période et $f = \frac{1}{T}$ la fréquence



La fréquence du secteur est de 50 Hz

Basse fréquence (B.F.) $10^2 \leq f \leq 10^4\ Hz$

Haute fréquence $10^4 \leq f \leq 10^9 Hz$

Présentation de i(t) :

i(t) peut être représenté par la projection, sur un axe vertical, d'un vecteur de norme I appelé vecteur de Fresnel.

Au bout d'une période T le vecteur de Fresnel aura effectué un tour complet (2π).

3- Intensité efficace d'un courant alternatif

L'intensité efficace d'un courant alternatif $i(t)$ est l'intensité d'un courant continu qui, passant dans la même résistance ohmique R que $i(t)$, dégageraient pendent une période la même quantité de chaleur par effet joule.

La quantité de chaleur dégagée pendant T est :

$$w = \int_0^T i^2 dt = \int_0^T RI_m^2 cos^2(\omega t + \varphi)dt$$

$$= RI_m^2 \int \frac{1 + \cos 2(\omega t + \varphi)}{2} dt = RI_m^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2(\omega t + \varphi)}{4\omega}\right]$$

$$= \frac{1}{2} R I_m^2 T = R I_{eff}^2 T$$

D'où :

$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Autrement : $I_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = \frac{I_m^2}{2}$

L'intensité moyenne de i(t) est :

$$i_{moy} = \langle i(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T i(t)dt = \frac{I_m}{T}\int_0^T \cos(\omega t + \varphi)dt = \frac{1}{T}[\sin(\omega t + \varphi)]_0^T = 0$$

Remarques:

i. La valeur efficace est égale à la racine carrée de la moyenne du carré de la valeur instantanée de i(t).

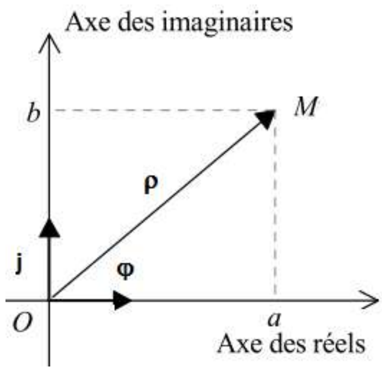
ii. A chaque instant, le courant alternatif agit comme le ferait le courant continu. En conséquence, les études et les lois faites sur le courant continu sont applicables, à chaque instant, sur le courant alternatif.

II- Rappels sur les nombres complexes et sur la méthode de Fresnel

1- Nombres complexes

Soit un point M du plan complexe. Ses coordonnées peuvent (a,b) peuvent être déterminées en fonction des coordonnées polaires (ρ, φ).

L'affixe du point M est :



$$\bar{Z} = a + jb$$

$a = Re(\bar{Z})$ est appelé partie réelle de Z et $b = Im(\bar{Z})$ sa partie imaginaire. j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$

Le conjugué de Z est : $\bar{Z}^* = a - jb$

Les relations d'Euler : $\begin{cases} e^{j\varphi} = \cos\varphi + jsin\varphi \\ e^{-j\varphi} = \cos\varphi - jsin\varphi \end{cases}$

Permettent d'obtenir $Z = a + jb = \rho(\cos\varphi + jsin\varphi) = \rho e^{j\varphi}$

$\rho^2 = \sqrt{a^2 + b^2} = \bar{Z}\bar{Z}^*$ c'est le module du nombre complexe $\bar{Z}$

φ tel que $tan\varphi = \frac{b}{a}$ est l'argument du nombre complexe.

2- Méthode de Fresnel

Une grandeur sinusoïdale $i(t) = I_m cos(\omega t + \varphi)$ peut être présentée par la projection sur un axe (ox) appelé origine des phases, d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de module I_m tournant uniformément à la vitesse angulaire ω et faisant avec cet axe l'angle φ à t=0 et $\omega t + \varphi$ à l'instant t. Dans la pratique, on se limite à la présentation vectorielle à t=0.

III- Circuits électriques en régimes quasi-stationnaires: cas des circuits sinusoïdaux

Un régime est dit quasi stationnaire lorsque la tension aux bornes d'un dipôle et la tension le traversant varient lentement au cours du temps. Autrement, u(t) = f(i(t) vérifient une équation différentielle linéaire. Une telle situation est réalisable pour un courant sinusoïdal de longueur d'onde associée à sa fréquence $\lambda = \frac{c}{f}$ grande devant la dimension du circuit.

Exemple : $f_0 = 10MHz$ $\lambda = 30\ cm$. Pour $f < f_0$ l'approximation est valable.

1- Impédance de circuits simples

Le courant alternatif suit les lois du courant continu, donc la loi d'Ohm est applicable et on écrit :

$v(t) = Z\ i(t)$ avec $Z = |Z|e^{j\varphi}$

Z s'appelle l'impédance complexe du circuit (en ohms), $|Z|$ est l'impédance du circuit et φ le déphasage existant entre la tension et le courant ou l'argument.

Association des impédances :

i- en série : $Z_{eq} = \sum Z_i$
ii- en parallèle : $\frac{1}{Z_{eq}} = \sum \frac{1}{Z_i}$

a- Circuit ne comprenant qu'une résistance

Soit un circuit comportant une résistance R alimentée par un générateur de tension sinusoïdale $u(t) = U_m cos(\omega t)$. D'après la loi de Kirchhoff $u(t) = Ri(t)$. En supposant que $i(t) = I_m cos(\omega t + \varphi)$ donc $U_m = RI_m$ et $\varphi = 0$
Ainsi aux bornes d'une résistance passive la tension et le courant sont en phase et le module $Z = |Z| = \frac{U_m}{I_m} = R$
Présentation de Fresnel :

b- Circuit comprenant qu'une inductance pure

Soit une inductance L parfaite alimentée par un générateur de tension sinusoïdale $(t) = U_m cos(\omega t)$.

On a : $u(t) = U_m cos(\omega t) = L\frac{di(t)}{dt}$

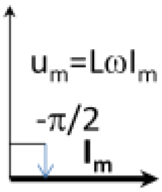
$$= L\frac{dI_m cos(\omega t+\varphi)}{dt}$$

$$= -L\omega I_m sin(\omega t + \varphi) \quad = L\omega I_m cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Ainsi: le module $U_m = L\omega I_m$ et la phase $0 = \varphi + \frac{\pi}{2}$

$|Z| = \frac{U_m}{I_m} = L\omega$ et $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ et par conséquent $i(t) = I_m cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$

Le courant est quadrature retard sur la tension $= -\frac{\pi}{2}$.



ou la tension est quadrature avance sur le courant.

L'expression de l'impédance complexe est

$$\bar{Z} = \frac{\overline{u(t)}}{\overline{\iota(t)}} = \frac{U_m e^{j\omega t}}{I_m e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}} == L\omega e^{j\frac{\pi}{2}} = jL\omega$$

c- Circuit ne comprenant qu'une capacité

Soit une capacité C parfaite alimentée par un générateur de tension sinusoïdale $(t) = U_m cos(\omega t)$.

On a : $u(t) = U_m cos(\omega t) = u_c(t) = \frac{Q}{C} = \frac{\int i(t)dt}{C}$

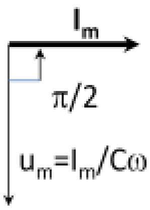
$$= \frac{\int I_m cos(\omega t + \varphi)\, dt}{C} = \frac{I_m sin(\omega t + \varphi)}{C\omega} = \frac{I_m}{C\omega} cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

Ainsi: le module $U_m = \frac{I_m}{C\omega}$ et la phase $0 = \varphi - \frac{\pi}{2}$

$|Z| = \frac{U_m}{I_m} = \frac{1}{C\omega}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et par conséquent $i(t) = I_m cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

Le courant est quadrature avance sur la tension $= \frac{\pi}{2}$.

ou la tension est quadrature retard sur le courant.

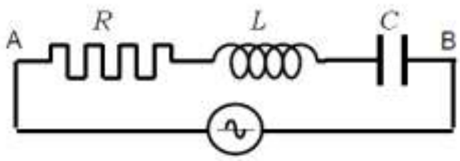


$$\bar{Z} = \frac{\overline{u(t)}}{\overline{\iota(t)}} = \frac{U_m e^{j\omega t}}{I_m e^{j(\omega t + \frac{\pi}{2})}} == \frac{1}{C\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}} = -\frac{j}{C\omega}$$

$\frac{1}{C\omega}$ s'appelle la réactance de la capacité.

IV- Circuit RLC en série dans un régime sinusoïdal permanant

Soit le circuit RLC en série alimenté par un générateur basses fréquences (G.B.F.) de tension $u(t) = U_m cos(\omega t)$.
D'après la 2eme loi de Kirchhoff : $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$
D'après la loi d'Ohm:



$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{Q}{C}$$
$$= Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{\int i(t)dt}{C}$$

Equation différentielle du second ordre en $i(t)$ dont la solution est :

$$i(t) = \underbrace{f(t)e^{-\lambda t}}_{solution\ générale} + \underbrace{I_m cos(\omega t + \varphi)}_{solution\ particulière}$$

En régime permanent : $f(t)e^{-\lambda t}$ tend vers zéro. Donc $i(t) = I_m cos(\omega t + \varphi)$

L'objectif c'est de déterminer I_m et φ de $i(t)$ connaissant $u(t)$. Il existe trois méthodes qui peuvent être utilisées pour les déterminer.

1- Méthode algébrique ou trigonométrique

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$U_m cos(\omega t) = RI_m cos(\omega t + \varphi) - L\omega I_m sin(\omega t + \varphi) + \frac{I_m}{C\omega} sin(\omega t + \varphi)$$

$$= I_m[Rcos(\omega t + \varphi) + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) sin(\omega t + \varphi) =$$

$$= I_m\left[R(cos\omega t cos\varphi - sin\omega t sin\varphi) + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)(sin\omega t cos\varphi + cos\omega t sin\varphi)\right]$$

$$= I_m\left[cos\omega t\left(Rcos\varphi + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) sin\varphi\right) + sin\omega t\left(-Rsin\varphi + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)\cos\varphi\right)\right]$$

On trouve :

$$\begin{cases} U_m = I_m(Rcos\varphi + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) sin\varphi) & (1) \\ 0 = I_m(-Rsin\varphi + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)\cos\varphi) & (2) \end{cases}$$

$$(1)^2 + (2)^2 = {I_m}^2[(Rcos\varphi + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) sin\varphi)^2 + (-Rsin\varphi + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)\cos\varphi)^2]$$

$$= {I_m}^2[(R^2cos^2\varphi + (\left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) sin\varphi)^2 + 2R\left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) cos\varphi sin\varphi$$

$$+ (R^2sin^2\varphi + (\left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)\cos\varphi)^2 - 2R\left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) cos\varphi sin\varphi]$$

$$= {I_m}^2[(R^2cos^2\varphi + (\left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right) sin\varphi)^2 + (R^2sin^2\varphi + (\left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)\cos\varphi)^2]$$

$$= {I_m}^2[(R^2 + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2]$$

Donc :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Et d'après l'équation (2) on a:

$$tg\varphi = -\frac{(L\omega - \frac{1}{C\omega})}{R}$$

Deux cas se présentent :

i- $L\omega > \frac{1}{C\omega}$; $tg\varphi < 0$ $donc$ $\varphi < 0$. Le courant est en retard de phase sur la tension.

ii- $L\omega < \frac{1}{C\omega}$; $tg\varphi > 0$ $donc$ $\varphi > 0$. Le courant est en avance de phase sur la tension.

2- Méthode de Fresnel

On a: $u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$. Les tensions sont considérées comme des vecteurs tournant dans le sens positif avec la même pulsation ω. Ainsi :

$$\overrightarrow{u(t)} = \overrightarrow{u_R(t)} + \overrightarrow{u_L(t)} + \overrightarrow{u_C(t)}$$

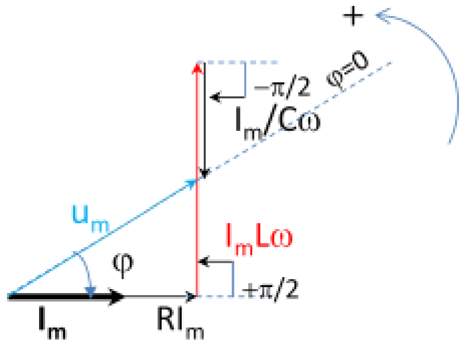
En utilisant les résultats du paragraphe :

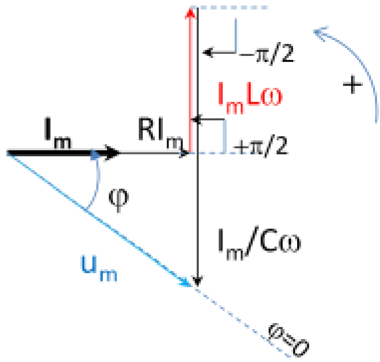
- $u_R(t)$ est en phase avec $i(t)$
- $u_L(t)$ est en avance de phase $\frac{\pi}{2}$ sur $i(t)$

- $u_C(t)$ est en retard de phase $-\frac{\pi}{2}$ sur $i(t)$

Cas où $L\omega > \frac{1}{C\omega}$

Cas où $L\omega < \frac{1}{C\omega}$

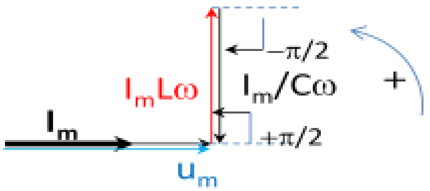




i(t) est en retard de phase sur $u(t)$
$\varphi < 0$; i(t) $= I_m cos(\omega t - |\varphi|)$
Le circuit est dit inductif

i(t) est en retard de phase sur $u(t)$
$\varphi > 0$; i(t) $= I_m cos(\omega t + |\varphi|)$
Le circuit est dit capacitif

Cas où $L\omega = \frac{1}{C\omega}$: la réactance est nulle ; $\varphi = 0$. Le circuit est en a résonance.



La fréquence de résonance est telle que :

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

3- Méthode des complexes

Les expressions complexes de la tension et du courant sont respectivement :
$\overline{u(t)} = U_m e^{j\omega t}$ et $\overline{\imath(t)} = I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$

i- L'impédance complexe du circuit est :

$$\bar{Z} = \frac{\overline{u(t)}}{\overline{\imath(t)}} = \frac{U_m e^{j\omega t}}{I_m e^{j(\omega t+\varphi)}} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = R + jX$$

X est appelé réactance du circuit RLC, c'est la somme des réactances de la bobine et du condensateur.

$$I_m = \frac{\left|\overline{u(t)}\right|}{|\bar{Z}|} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Et : $Arg(\overline{u(t)}) = Arg(\bar{Z}) + Arg(\overline{\imath(t)})$

$$0 = Arctan(\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R}) + \varphi$$

$$tg\varphi = -\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R}$$

ii- Résolution de l'équation différentielle

$$\overline{u(t)} = \overline{u_R(t)} + \overline{u_L(t)} + \overline{u_C(t)}$$

$$U_m e^{j\omega t} = RI_m e^{j(\omega t+\varphi)} + jL\omega I_m e^{j(\omega t+\varphi)} + \frac{1}{jC\omega} I_m e^{j(\omega t+\varphi)}$$

$$U_m = RI_m + jI_m(L\omega + \frac{1}{jC\omega})e^{j\varphi}$$

Ainsi :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2}}$$

Et

$$tg\varphi = -\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R}$$

4-Etude de la résonnance du circuit RLC

D'après le paragraphe ci-dessus, l'intensité efficace et l'argument du courant i(t) sont donnés par :

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(-L\omega + \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad \text{et } tg\varphi = -\frac{\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{R}$$

L'intensité I_m est maximale lorsque $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$,c'est-à-dire que :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Donc : $I_m = \frac{U_m}{R}$ et $\varphi = 0$

Ainsi le circuit RLC se comporte comme une simple résistance. (suite voir TP)