

## Chapitre IV : L'électrostatique dans les milieux diélectriques

Un milieu diélectrique est un milieu isolant qui ne contient donc pas de charges libres (cas idéal) ou qui contient très peu de charges libres (cas réel).

### I. Rappels sur les dipôles électriques :

- Un dipôle électrique est un couple rigide de deux charges ponctuelles égales, en valeur absolue, et de signes opposés (- q, q) telles que la distance qui les sépare est très faible devant les distances considérées.
- Un dipôle électrique est caractérisé par son moment dipolaire  $\vec{p}$  défini par :

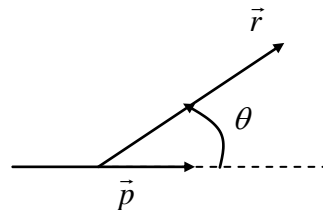
$$\vec{p} = q\vec{NP}$$

où P et N sont respectivement les positions des charges  $q > 0$  et  $-q$ .

- Le potentiel électrostatique créé par un dipôle électrique en un point, de l'espace, repéré par ses coordonnées polaires  $r$  et  $\theta$  est donné par :

$$V = \frac{\vec{p}\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Figure IV-1



- Un dipôle électrique placé dans un champ électrique  $\vec{E}$  s'oriente de sorte que son moment dipolaire  $\vec{p}$  se mette dans le sens de  $\vec{E}$ .

### II. Les distributions multipolaires :

#### II. 1. Définition :

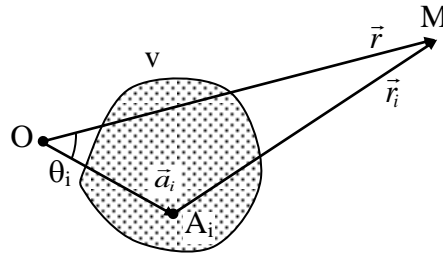
Une distribution multipolaire est une distribution discrète de charges ponctuelles positives et négatives.

#### II. 2. Potentiel créé par une distribution multipolaire :

(à grande distance de la distribution)

Considérons une distribution de charges ponctuelles  $q_i$  placées aux points  $A_i$  dans un volume  $v$ .

Figure IV-2



Le potentiel électrostatique  $V$  créé par cette distribution, en un point  $M$  repéré par le vecteur position  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ , (par rapport à un point origine  $O$  du voisinage de la distribution) est :

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$$

Or :

$$\begin{aligned} \vec{r}_i = \vec{r} - \vec{a}_i &\Rightarrow r_i = \sqrt{r^2 + a_i^2 - 2ra_i \cos \theta_i} = r \sqrt{1 + \frac{a_i^2}{r^2} - 2 \frac{a_i}{r} \cos \theta_i} \\ &\Rightarrow \frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{2a_i \cos \theta_i}{r} + \frac{a_i^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

A très grande distance de la distribution ( $r \gg a_i$ ), on peut donc utiliser le développement limité à l'ordre 2 de  $(1 - x)^n$  au voisinage de zéro et prendre :

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left( 1 - \frac{1}{2} \left[ -\frac{2a_i \cos \theta_i}{r} + \frac{a_i^2}{r^2} \right] + \frac{3}{8} \left[ -\frac{2a_i \cos \theta_i}{r} + \frac{a_i^2}{r^2} \right]^2 \right)$$

D'où :

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r} \left( 1 + \frac{a_i \cos \theta_i}{r} + \frac{a_i^2(3 \cos^2 \theta_i - 1)}{2r^2} \right)$$

Donc :

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} \left( 1 + \frac{a_i \cos \theta_i}{r} + \frac{a_i^2(3 \cos^2 \theta_i - 1)}{2r^2} \right)$$

Ou encore :

$$\begin{aligned} V &= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \sum_i \frac{q_i a_i \cos \theta_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \sum_i \frac{3q_i a_i^2 (\cos^2 \theta_i - 1)}{8\pi\epsilon_0 r^3} \\ &= \frac{\sum_i q_i}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\sum_i q_i \vec{a}_i \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3 \sum_i q_i a_i^2 (\cos^2 \theta_i - 1)}{8\pi\epsilon_0 r^3} \end{aligned}$$

**II. 3. Distribution monopolaire :**

Une distribution est dite monopolaire si :

$$\sum_i q_i = Q \neq 0.$$

Pour une telle distribution, le potentiel  $V$  créé en un point  $M$  très éloigné de la distribution est :

$$V = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

(les deux autres termes, en  $\frac{1}{r^2}$  et  $\frac{1}{r^3}$ , sont négligeables devant le terme en  $\frac{1}{r}$ ).

Une telle distribution se comporte donc comme une charge ponctuelle  $Q$  placée à la distance  $r$  du point  $M$  considéré.

**II. 4. Distribution dipolaire :**

Une distribution est dite dipolaire si :

$$\sum_i q_i = 0 \text{ et } \vec{p} = \sum_i q_i \vec{a}_i \neq 0.$$

Pour une telle distribution, le potentiel  $V$  créé en un point  $M$  très éloigné de la distribution est :

$$V = \sum_i \frac{q_i a_i \cos \theta_i}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\sum_i q_i \vec{a}_i \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{\vec{p} \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

Si on utilise les barycentres  $P$  (des charges positives  $q_j$ ) et  $N$  (des charges négatives  $q_k$ ) définis par :

$$\sum_j q_j \overrightarrow{PA_j} = 0 \text{ et } \sum_k q_k \overrightarrow{NA_k} = 0$$

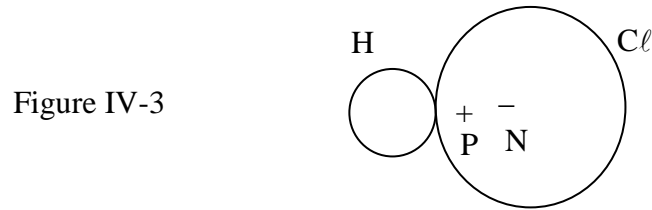
le moment dipolaire  $\vec{p}$  de la distribution s'exprime par :

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \sum_i q_i \vec{a}_i = \sum_j q_j \vec{a}_j + \sum_k q_k \vec{a}_k = \sum_j q_j (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_j}) + \sum_k q_k (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NA_k}) \\ &= \sum_j q_j \overrightarrow{OP} + \sum_k q_k \overrightarrow{ON} = Q (\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{ON}) = Q \overrightarrow{NP} \end{aligned}$$

$$\text{où } Q = \sum_j q_j = -\sum_k q_k \text{ (car : } \sum_i q_i = \sum_j q_j + \sum_k q_k = 0)$$

Une distribution dipolaire se comporte donc comme un dipôle ( $Q, -Q$ ) dont les charges  $Q$  (somme des charges positives) et  $-Q$  (somme des charges négatives) sont placées aux centres de charges  $P$  (des charges positives) et  $N$  (des charges négatives).

**Exemple :** La molécule  $\text{HCl}$



Le chlore étant plus électronégatif que l'hydrogène, le barycentre des charges négatives est déplacé, par rapport à celui des charges positives, vers le chlore.

**Remarque :**

Si les porteurs de charges sont identiques, les barycentres de charges se confondent avec les barycentres de masses (c'est le cas des électrons et des protons dans les atomes et les molécules).

## II. 5. Distribution quadripolaire :

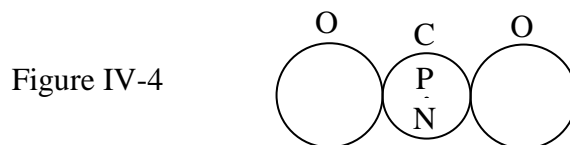
Une distribution est dite quadripolaire si :

$$\sum_i q_i = 0 \text{ et } \vec{p} = \sum_i q_i \vec{a}_i = 0.$$

Pour une telle distribution, le potentiel  $V$  créé en un point  $M$  très éloigné de la distribution est :

$$V = \sum_i \frac{3q_i a_i^2 (\cos^2 \theta_i - 1)}{8\pi\epsilon_0 r^3}$$

**Exemple :** La molécule  $\text{CO}_2$ .



La molécule étant linéaire et symétrique, le barycentre des charges négative reste confondu avec celui des charges positives malgré la différence d'électronégativité entre le carbone et l'oxygène.

## III. Aspect macroscopique de la polarisation électrique :

### III. 1. Le phénomène de polarisation électrique :

Considérons un volume  $v$  d'un diélectrique solide placé dans un champ électrique extérieur  $\vec{E}_e$ . Ce champ entraîne un petit déplacement des nuages électroniques

des atomes constituant le diélectrique. Donc, le barycentre des électrons de chaque atome se trouve ainsi décalé par rapport à celui des charges positives du noyau entraînant ainsi l'apparition de dipôles électriques dans le volume  $v$  : c'est le phénomène de polarisation électrique. Le diélectrique est dit polarisé et le champ  $\vec{E}_e$  est appelé champ excitateur ou polarisant.

Si le diélectrique est un liquide ou un gaz, deux cas sont à considérer selon que les molécules qui le constituent sont polaires (ont un moment dipolaire non nul même en absence de champ extérieur) ou non polaires :

- Si les molécules sont polaires, le champ extérieur  $\vec{E}_e$  les oriente de façon à ce que leurs moments dipolaires intrinsèques  $\vec{p}_i$  s'orientent globalement dans le sens de  $\vec{E}_e$ .
- Si les molécules ne sont pas polaires, le champ extérieur  $\vec{E}_e$  décale les barycentres des charges négatives par rapport à ceux des charges positives entraînant ainsi l'apparition de dipôles qui s'orientent dans le sens de  $\vec{E}_e$ .

Dans tous les cas de diélectriques (solide, liquide ou gaz), chaque élément de volume  $dv$  du diélectrique polarisé est donc l'équivalent d'un dipôle de moment dipolaire  $d\vec{p}$ . Le rapport  $\frac{d\vec{p}}{dv} = \vec{P}$ , qui représente le moment dipolaire par unité de volume, est appelé vecteur polarisation.

### III. 2. Potentiel et champ électriques créés par un diélectrique polarisé :

Considérons un volume  $v$  d'un diélectrique polarisé.

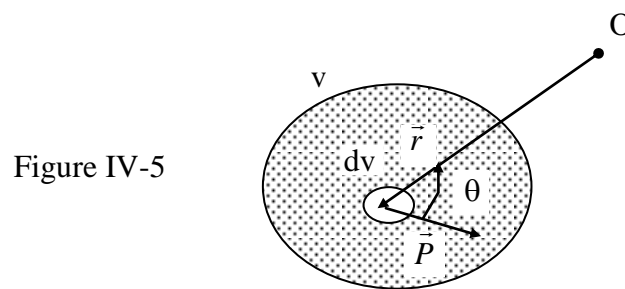


Figure IV-5

Le potentiel élémentaire  $dV_p$  créé, en un point  $O$ , par un élément de volume  $dv$  du diélectrique polarisé est :

$$dV_p = \frac{dp \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{P \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} dv = \frac{\vec{P} \cdot (-\vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{P} \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) dv$$

$$\Rightarrow V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \vec{P} \cdot \text{grad} \left( \frac{1}{r} \right) dv$$

Or :

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{P}}{r}\right) = \frac{1}{r} \operatorname{div}\vec{P} + \vec{P} \operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} V_p &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \operatorname{div}\left(\frac{\vec{P}}{r}\right) dv - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{1}{r} \operatorname{div}\vec{P} dv \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\vec{P}}{r} \cdot d\vec{s} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{-\operatorname{div}\vec{P}}{r} dv \end{aligned}$$

Soit :

$$V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_p}{r} ds + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho_p}{r} dv \quad \text{avec : } \sigma_p = \vec{P}\vec{n} \text{ et } \rho_p = -\operatorname{div}\vec{P}$$

$\vec{n}$  étant le vecteur unitaire perpendiculaire à S (surface limitant le volume v) et orienté vers l'extérieur du diélectrique.

V est donc le potentiel créé par des charges en surface de densité  $\sigma_p$  et des charges en volume de densité  $\rho_p$ .  $\sigma_p$  et  $\rho_p$  sont des densités de charges fictives appelées densités de charges de polarisation.

Le champ électrique  $\vec{E}_p$  créé par le diélectrique polarisé, en un point de l'espace, est donc le champ créé par les charges de polarisation :

$$\vec{E}_p = -\operatorname{grad}V_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma_p \vec{r}}{r^3} ds + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_v \frac{\rho_p \vec{r}}{r^3} dv$$

où  $\vec{r}$  est le vecteur position du point de l'espace par rapport au centre de l'élément ds ou de l'élément dv (il est dans le sens inverse de celui considéré dans la figure IV-5).

#### Remarques :

- Le champ  $\vec{E}_p$  est appelé champ dépolarisant.
- Le champ  $\vec{E}_p$  peut être calculé par application du théorème de Gauss si la distribution des charges de polarisation admet une symétrie qui permet l'application de ce théorème pour le calcul du champ électrique.

#### IV. Equations de l'électrostatique dans un diélectrique :

Dans un diélectrique polarisé, le champ électrostatique  $\vec{E}$  est la superposition du champ extérieur  $\vec{E}_e$  (champ polarisant) et du champ de polarisation  $\vec{E}_p$  :

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_p.$$

Donc :

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{E}_e + \operatorname{div} \vec{E}_p = \frac{\rho}{\varepsilon_0} + \frac{\rho_p}{\varepsilon_0} = \frac{\rho_t}{\varepsilon_0} \quad (\text{avec : } \rho_t = \rho + \rho_p)$$

$$\text{et } \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = \vec{\operatorname{rot}} \vec{E}_e + \vec{\operatorname{rot}} \vec{E}_p = \vec{0}$$

Si on introduit le vecteur déplacement électrique  $\vec{D}$  défini par :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

les équations de l'électrostatique pour ce vecteur s'écrivent :

$$\operatorname{div} \vec{D} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} + \operatorname{div} \vec{P} = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} - \rho_p = \rho + \rho_p - \rho_p = \rho$$

$$\text{et } \vec{\operatorname{rot}} \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{\operatorname{rot}} \vec{E} + \vec{\operatorname{rot}} \vec{P} = \vec{\operatorname{rot}} \vec{P}$$

où  $\rho$  est la densité des charges excitatrices (appelées également charge libres).

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \Rightarrow \iiint_v \operatorname{div} \vec{D} dv = \iiint_v \rho dv \Rightarrow \oiint_S \vec{D} d\vec{s} = Q_{\text{int}}$$

où  $Q_{\text{int}}$  est la somme des charges libres qui se trouvent à l'intérieur de la surface fermée  $S$ .

Cette dernière équation représente le Théorème de Gauss pour  $\vec{D}$ .

## V. Les milieux diélectriques LHI :

### V. 1. Définitions :

- Un milieu est dit linéaire si  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  (dans ce milieu) sont reliés par une relation linéaire de la forme :

$$\vec{D}(M) = [\varepsilon(M)] \vec{E}(M)$$

où  $[\varepsilon(M)]$  est une matrice (3, 3) appelée matrice permittivité électrique.

Dans un tel milieu  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  ne sont pas colinéaires.

- Un milieu est dit linéaire homogène si la matrice  $[\varepsilon(M)]$  ne dépend pas de la position du point  $M$  :

$$[\varepsilon(M)] = [\varepsilon] \Rightarrow \vec{D}(M) = [\varepsilon] \vec{E}(M)$$

- Un milieu est dit linéaire isotrope si  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  (dans ce milieu) sont reliés par une relation linéaire de la forme :

$$\vec{D}(M) = \varepsilon(M) \vec{E}(M)$$

Dans un tel milieu  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  sont colinéaires.  $\varepsilon(M)$  est la permittivité électrique du milieu au point  $M$ .

- Un milieu est dit linéaire homogène isotrope (LHI) si  $\varepsilon(M) = \varepsilon$  ne dépend pas de la position du point  $M$  du diélectrique :

$$\vec{D}(M) = \varepsilon \vec{E}(M).$$

$\varepsilon$  est la permittivité électrique du milieu.

### V. 2. Equations de l'électrostatique dans un milieu LHI :

Dans un milieu LHI :

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}.$$

Or :

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Donc :

$$\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0) \vec{E} = \varepsilon_0 \left( \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} - 1 \right) \vec{E} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

où  $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$  est la permittivité relative (du milieu par rapport au vide) et

$\chi_e = (\varepsilon_r - 1)$  est la susceptibilité électrique du milieu.

#### Remarque :

$\varepsilon_r = n^2$  où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu.

Donc :  $\varepsilon_r > 1$  et  $\chi_e > 0$ .

Dans un diélectrique de permittivité  $\varepsilon$  :

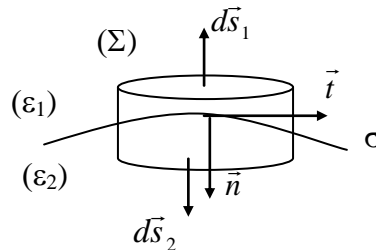
$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \operatorname{rot} \vec{D} = \operatorname{rot} (\varepsilon \vec{E}) = \varepsilon \operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

### V. 3. Relations de passage pour $\vec{E}$ et $\vec{D}$ :

#### • Composantes normales :

Considérons une surface chargée, avec une charge de densité  $\sigma$ , séparant deux milieux diélectriques LHI (1) et (2) de permittivités électriques respectives  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ .

Figure IV-6



Dans le milieu (1) :

$$\vec{D} = \vec{D}_1 = D_{1n} \vec{n} + D_{1t} \vec{t}$$

Dans le milieu (2) :

$$\vec{D} = \vec{D}_2 = D_{2n} \vec{n} + D_{2t} \vec{t}.$$



Si on applique le théorème de Gauss pour  $\vec{D}$  en prenant comme surface de Gauss  $\Sigma$  un cylindre de surface de base  $Sb$  petite (de sorte que  $D_{1n}$  et  $D_{2n}$  peuvent être considérées comme constants sur  $Sb_1$  et  $Sb_2$ ) et de hauteur infiniment petite (de sorte qu'on reste au voisinage de la surface chargée) :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{D} d\vec{s} = Q_{int} \Rightarrow \iint_{Sb_1} \vec{D}_1 d\vec{s}_1 + \iint_{Sb_2} \vec{D}_2 d\vec{s}_2 = \sigma S b$$

$$\Rightarrow -D_{1n} S b_1 + D_{2n} S b_2 = \sigma S b \Rightarrow D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

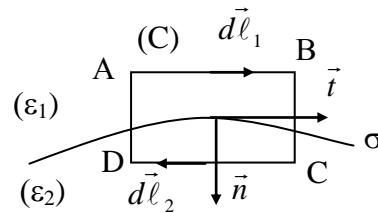
Si la surface de séparation n'est pas chargée ( $\sigma = 0$ ) alors il y a continuité de la composante normale de  $\vec{D}$  à la traversée de cette surface.

Pour les composantes normales de  $\vec{E}$  :  $D_{2n} - D_{1n} = \sigma \Rightarrow \epsilon_2 E_{2n} - \epsilon_1 E_{1n} = \sigma$

• **Composantes tangentielles :**

Considérons une surface chargée, avec une charge de densité  $\sigma$ , séparant deux milieux diélectriques LHI (1) et (2) de permittivités électriques respectives  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ .

Figure IV-7



Dans le milieu (1) :

$$\vec{E} = \vec{E}_1 = E_{1n} \vec{n} + E_{1t} \vec{t}$$

Dans le milieu (2) :

$$\vec{E} = \vec{E}_2 = E_{2n} \vec{n} + E_{2t} \vec{t}.$$

D'autre part :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0} \Rightarrow \oint_C \vec{E} d\vec{\ell} = \iint_S (\vec{\text{rot}} \vec{E}) d\vec{s} = 0$$

où  $S$  est une surface quelconque limitée par le contour  $C$ .

Donc, si on choisit comme contour  $C$  un rectangle ABCD de longueur  $L$ , parallèle à la surface de séparation, suffisamment faible (de sorte que  $\vec{E}$  soit pratiquement constant sur  $L$ ) et de largeur  $\ell$  infiniment petite (de sorte qu'on reste au voisinage de la surface chargée) on peut écrire :

$$\oint_C \vec{E} d\vec{\ell} = \int_{AB} \vec{E}_1 d\vec{\ell}_1 + \int_{CD} \vec{E}_2 d\vec{\ell}_2 = E_{1t} L - E_{2t} L = 0 \Rightarrow E_{1t} = E_{2t}$$

$$\left( \int_{BC} \vec{E} d\vec{\ell} = \int_{DA} \vec{E} d\vec{\ell} = 0 \text{ car } BC = DA = \ell \rightarrow 0 \right)$$

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \frac{D_{1t}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{2t}}{\varepsilon_2}$$

Il y a donc continuité de la composante tangentielle de  $\vec{E}$  à la traversée d'une surface chargée.

### VI. Energie électrostatique :

Si  $\rho$  est la densité de charges électriques dans une région où le potentiel électrostatique est  $V$  alors l'énergie électrostatique  $W$  du système est :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_v \rho V dv = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \rho V dv \quad (\text{où } v \text{ est le volume chargé}).$$

Or, d'après la forme locale du théorème de Gauss pour  $\vec{D}$  :

$$\text{div} \vec{D} = \rho.$$

Donc :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} (\text{div} \vec{D}) V dv = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \text{div}(V \vec{D}) dv - \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \vec{D} \overrightarrow{\text{grad}} V dv \\ &= \frac{1}{2} \oiint_S V \vec{D} d\vec{s} + \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \vec{D} \vec{E} dv \end{aligned}$$

où  $S$  est toute surface fermée limitant l'espace.

Si on prend comme surface  $S$  une sphère de rayon  $r$  infini,  $V$  tend vers zéro comme  $\frac{1}{r}$  et  $D$  tend vers zéro comme  $\frac{1}{r^2}$ .

Par ailleurs :

$$ds = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi.$$

Donc :

$$\oiint_S V \vec{D} d\vec{s} = \lim_{r \rightarrow \infty} K \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{r} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 0$$

D'où :

$$W = \iiint_{\text{espace}} \frac{1}{2} \vec{E} \vec{D} dv = \iiint_{\text{espace}} \omega \, dv$$

où  $\omega = \frac{1}{2} \vec{D} \vec{E}$  est la densité d'énergie électrostatique.

### Remarque :

Dans le vide,  $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \Rightarrow \omega = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$  (même expression que celle obtenue en électrostatique dans le vide)

### VII. Etude microscopique de la polarisation électrique :

**VII. 1. Champ microscopique et champ macroscopique :**

- On appelle champ microscopique  $\vec{e}(M)$  le champ électrique en un point M quelconque du vide qui sépare les particules constituant le milieu diélectrique. Ce champ est la superposition du champ extérieur  $\vec{E}_e(M)$  et du champ  $\vec{E}_q(M)$  créé par les charges des particules constituant le milieu :

$$\vec{e}(M) = \vec{E}_e(M) + \vec{E}_q(M).$$

**Remarques :**

- \* Le champ  $\vec{E}_e$  est créé par des charges éloignées du point M ; c'est un champ qui varie donc lentement au voisinage de M.
- \* Le champ  $\vec{E}_q$  est créé par des charges dont une partie est très proche de M ; c'est un champ qui varie donc rapidement au voisinage de M.

- Le champ macroscopique  $\vec{E}(M)$  est la valeur moyenne du champ microscopique sur un volume élémentaire  $v$  de centre M :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{v} \iiint_v \vec{e}(M) dv = \frac{1}{v} \iiint_v \vec{E}_e(M) dv + \frac{1}{v} \iiint_v \vec{E}_q(M) dv$$

Or, le champ  $\vec{E}_e(M)$  est pratiquement constant sur le volume élémentaire  $v$  (car il varie lentement au voisinage de M).

Donc :

$$\frac{1}{v} \iiint_v \vec{E}_e(M) dv = \vec{E}_e(M)$$

D'où :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_e(M) + \frac{1}{v} \iiint_v \vec{E}_q(M) dv = \vec{E}_e(M) + \vec{E}_p(M).$$

Ce champ est le champ qui figure dans les équations de Maxwell.

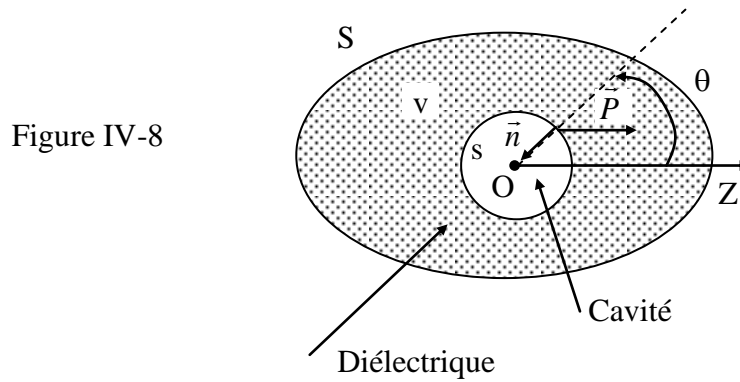
**VII. 2. Champ local :****VII. 2. 1. Définition :**

On appelle champ local  $\vec{E}_\ell(M)$ , le champ qui agit sur le dipôle situé en un point M et qui est créé par l'ensemble des charges et des dipôles autres que celui situé au point M.

**VII. 2. 2. Calcul du champ local :** (cas d'une polarisation uniforme)

Considérons un milieu diélectrique de volume  $v$  uniformément polarisé sous l'effet d'un champ extérieur uniforme  $\vec{E}_e$ .

Le champ local  $\vec{E}_\ell$  est le champ au centre  $O$  d'une cavité sphérique de très faible rayon (espace occupé par le dipôle qui subit l'action du champ local). Ce champ est la superposition du champ  $\vec{E}_e$  et des champs  $\vec{E}_s$  et  $\vec{E}_s$  créés en  $O$  par les charges de polarisation des surfaces  $s$  et  $S$  limitant le diélectrique (il n'y a pas de charges de polarisation en volume car la polarisation est supposée uniforme).



La densité des charges de polarisation en volume est nulle car la polarisation est uniforme :

$$\rho_p = -\text{div}\vec{P} = 0.$$

Soit :

$$\vec{E}_\ell = \vec{E}_e + \vec{E}_s + \vec{E}_s$$

Or, le champ électrostatique  $\vec{E}$  en  $O$  est donné par :

$$\vec{E} = \vec{E}_e + \vec{E}_p$$

où  $\vec{E}_p$  est le champ créé par les charges de polarisation de la surface  $S$  (puisque  $\rho_p = 0$ ).

Donc :

$$\vec{E}_s = \vec{E}_p = \vec{E} - \vec{E}_e.$$

D'où :

$$\vec{E}_\ell = \vec{E}_e + \vec{E}_s + \vec{E} - \vec{E}_e = \vec{E} + \vec{E}_s.$$

La densité des charges de polarisation  $\sigma_s$  sur la surface  $s$  est :

$$\sigma_s = \vec{P}\vec{n} = P \cos(\pi - \theta) = -P \cos \theta$$

Donc :

$$\vec{E}_s = \iint_s \frac{\sigma_s ds (-\vec{r})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \iint_s \frac{P \cos \theta ds \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

avec :

$$\vec{r} = r\vec{e}_r = r(\cos \theta \vec{e}_z + \sin \theta \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{e}_y)$$

$$\text{et } ds = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

D'où :

$$\vec{E}_s = \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi) \vec{e}_z$$

Car :

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \cos \varphi d\theta d\varphi = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \sin \varphi d\theta d\varphi = 0.$$

Soit :

$$\vec{E}_s = \frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^{\pi} -\cos^2 \theta (d \cos \theta) \vec{e}_z = \frac{P}{2\epsilon_0} \left[ -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi} \vec{e}_z = \frac{P}{3\epsilon_0} \vec{e}_z = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

D'où :

$$\vec{E}_\ell = \vec{E} + \vec{E}_s = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$$

### **VII. 3. Les différents mécanismes de polarisation :**

Dans un matériau diélectrique polarisé, trois mécanismes de polarisation peuvent avoir lieu : la polarisation d'orientation, la polarisation électronique et la polarisation ionique.

#### **VII. 3. 1. Polarisation d'orientation :**

Ce mécanisme de polarisation a lieu dans le cas de diélectriques liquides ou gazeux constitués de molécules polaires. En présence d'un champ local  $\vec{E}_\ell$ , les moments dipolaires intrinsèques  $\vec{p}$ , des molécules du diélectrique, tendent à s'orienter dans le sens de ce champ. Ce phénomène d'orientation est d'autant plus important que la température est faible.

La contribution  $\vec{p}_\theta$  de chaque molécule à la polarisation d'orientation est proportionnelle au champ local :

$$\vec{p}_\theta = \alpha_\theta \vec{E}_\ell.$$

Le coefficient de proportionnalité  $\alpha_\theta$ , appelé polarisabilité d'orientation d'une molécule du diélectrique, est inversement proportionnel à la température.

Si N est la densité de molécules (le nombre de molécules par unité de volume) du diélectrique, le vecteur polarisation d'orientation  $\vec{P}_\theta$  du diélectrique est donc :

$$\vec{P}_\theta = N\vec{p}_\theta = N\alpha_\theta \vec{E}_\ell.$$

### VII. 3. 2. Polarisation électronique :

La polarisation électronique est une conséquence de la déformation du nuage électronique des atomes (ou des molécules) constituant le diélectrique sous l'effet du champ local. Cette déformation entraîne l'apparition de moments dipolaires  $\vec{p}_e$  (pour chaque atome ou molécule du diélectrique) proportionnels au champ local :

$$\vec{p}_e = \alpha_e \vec{E}_\ell$$

où  $\alpha_e$  est la polarisabilité électronique des atomes (ou des molécules) du diélectrique.

Si  $N$  est la densité d'atomes (ou de molécules) du diélectrique, le vecteur polarisation électronique  $\vec{P}_e$  du diélectrique est donné par :

$$\vec{P}_e = N\vec{p}_e = N\alpha_e \vec{E}_\ell.$$

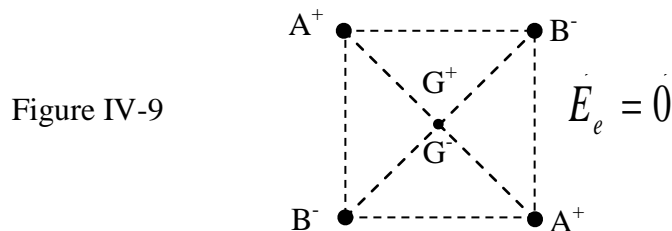
Si le diélectrique est composé de plusieurs types d'atomes (ou de molécules), chaque type est caractérisé par sa polarisabilité électronique  $\alpha_i$  et sa densité  $N_i$  et le vecteur polarisation  $\vec{P}_e$  du diélectrique est donné par :

$$\vec{P}_e = \sum_i N_i \alpha_i \vec{E}_\ell.$$

### VII. 3. 3. Polarisation ionique :

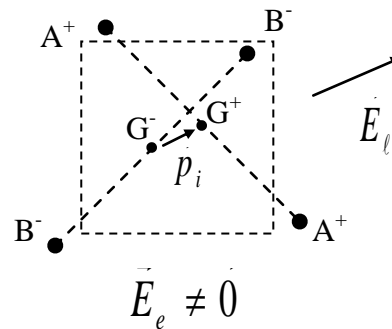
La polarisation ionique a lieu dans le cas de cristaux ioniques. Cette polarisation est une conséquence du déplacement des ions, constituant le cristal, sous l'effet du champ local.

En absence de champ extérieur, les barycentres des charges (ions) positifs  $G^+$  et négatifs  $G^-$  coïncident et le vecteur polarisation est donc nul.



En présence d'un champ extérieur, les ions positifs se déplacent légèrement dans le sens de  $\vec{E}_\ell$  et les ions négatifs se déplacent en sens inverse de  $\vec{E}_\ell$  ; ce qui entraîne un décalage des barycentres  $G^+$  et  $G^-$  des deux types d'ions donc un vecteur polarisation ionique  $\vec{P}_i$  non nul.

Figure IV-10



Le moment dipolaire par couple d'ions ( $A^+ B^-$ ,  $A^+ B^-$ ) est donné par :

$$\vec{p}_i = \alpha_i \vec{E}_\ell$$

où  $\alpha_i$  est la polarisabilité ionique d'un couple d'ions.

Si N est la densité de couples d'ions, le vecteur polarisation ionique  $\vec{P}_i$  s'exprime par :

$$\vec{P}_i = N\vec{p}_i = N\alpha_i \vec{E}_\ell.$$

**Remarque :**

Dans le cas des cristaux ioniques et des liquides ou gaz polaires (constitués de molécules polaires), il faut tenir compte de la polarisation électronique qui a toujours lieu pour les ions ou les atomes constituant le diélectrique. Le vecteur polarisation  $\vec{P}$  du diélectrique est la somme des vecteurs polarisation électronique et ionique ou électronique et d'orientation :

$$\vec{P} = \vec{P}_i + \vec{P}_e = N(\alpha_i + \alpha_e) \vec{E}_\ell = N\alpha \vec{E}_\ell$$

$$\text{ou } \vec{P} = \vec{P}_\theta + \vec{P}_e = N(\alpha_\theta + \alpha_e) \vec{E}_\ell = N\alpha \vec{E}_\ell$$

où  $\alpha$  est la polarisabilité moyenne par couple d'ions ou par molécule.

**VII. 4. Relation entre la polarisabilité et la susceptibilité électrique :**

Dans un diélectrique LHI uniformément polarisé nous avons vu que le champ local est donné par :

$$\vec{E}_\ell = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}.$$

Or, le vecteur polarisation  $\vec{P}$  s'exprime par :

$$\vec{P} = N\alpha \vec{E}_\ell = N\alpha \left( \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \right)$$

D'où :

$$\vec{P} = \frac{3\varepsilon_0 N\alpha}{3\varepsilon_0 - N\alpha} \vec{E}.$$

Or :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}.$$

Donc :

$$\chi_e = \frac{3N\alpha}{3\varepsilon_0 - N\alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{3\varepsilon_0 \chi_e}{N(3 + \chi_e)}$$

Si on utilise l'expression de la susceptibilité électrique en fonction de la permittivité relative du diélectrique on obtient une relation entre la polarisabilité et la permittivité relative :

$$\chi_e = \varepsilon_r - 1 \Rightarrow \alpha = \frac{3\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)}{N(2 + \varepsilon_r)} \Rightarrow \frac{\varepsilon_r - 1}{2 + \varepsilon_r} = \frac{N\alpha}{3\varepsilon_0}$$

Cette dernière équation constitue la relation de Clausius-Mossotti.