

# Béton Armé

## I. Principe du Béton Armé

La résistance du béton est très faible en traction. En revanche, l'acier résiste très bien à la traction.

Aussi, le principe sous-jacent au béton armé est d'insérer dans la matrice de béton des aciers dans les zones tendues.

### I.1. Cas du tirant ( $N$ en traction)

Toute la section de béton est tendue, les aciers longitudinaux reprennent seuls l'effort de traction (le béton n'a qu'une fonction d'enrobage).

### I.2. Cas du poteau ou du buton ( $N$ en compression)

la section de béton est globalement comprimée, la présence des aciers longitudinaux viennent seulement renforcer la résistance du poteau.

### I.3. Cas de la poutre en flexion ( $M$ et $V$ présents)

Des aciers longitudinaux sont insérées dans la zone tendue de la poutre pour reprendre l'effet de  $M$ .

Des aciers transversaux reprennent l'effort tranchant  $V$ . On les appelle aussi aciers de couture.

#### Théorème de réciprocité de Cauchy

Soit une poutre posée sur deux appuis soumise à un effort vertical  $P$ . La Figure I-1 représente l'allure du diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant.

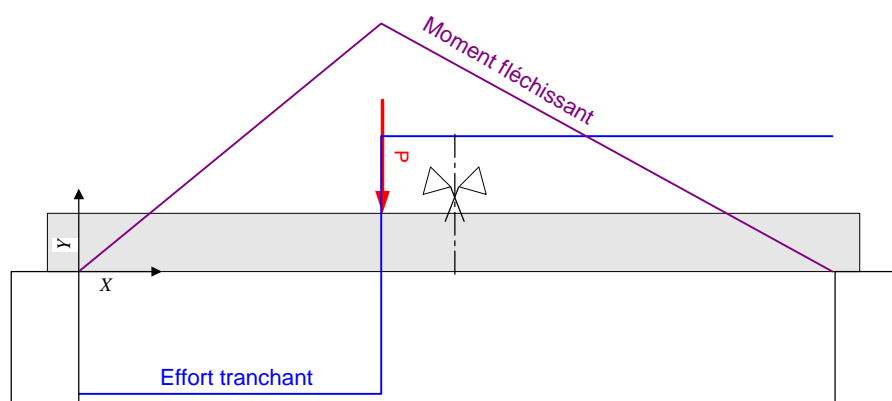


Figure I-1 - Sollicitations  $V$  et  $M$  dans une poutre soumise à de la flexion simple

Intéressons nous maintenant à un petit cube de poutre (Figure I-2) en l'isolant et en effectuant le bilan des actions. Ce cube comme la poutre en général est en équilibre. La somme des efforts et la somme des moments doivent donc être nuls.

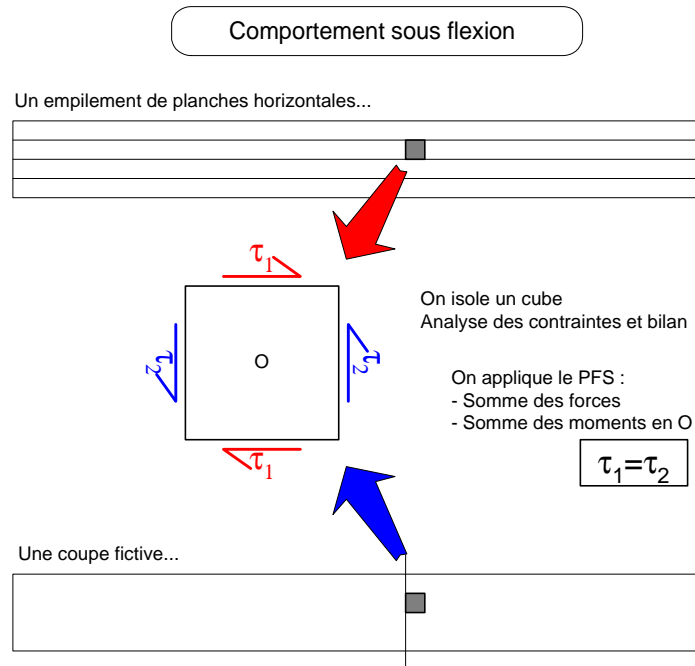


Figure I-2 - Théorème de Cauchy

La Figure I-2 met en évidence le théorème de Cauchy : à savoir, il y a égalité des contraintes tangentielles sur les 4 côtés du cube avec le sens de ces contraintes spécifié sur cette même figure.

Mise en évidence de la nécessité d'aciers de couture

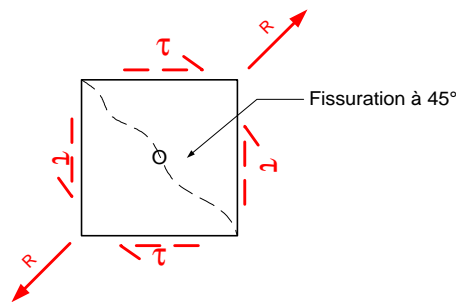


Figure I-3 - Démonstration de la nécessité des aciers de couture

Compte tenu du théorème de Cauchy, la résultante des contraintes tangentielles montre que dans le béton une fissuration va se dessiner à 45°.

Il faut couder cette fissure avec des aciers perpendiculaires à celle ci. Dans la réalité, il n'est pas très pratique de disposer les aciers à 45°. Aussi, dans la majorité des cas, les aciers sont positionnés verticalement (Cf. Poly).

**II. Bases réglementaires**

Le matériau béton – par nature non homogène - associé à l'acier induit un comportement autrement plus complexe que ne peut le décrire les hypothèses très simplificatrices de la RdM.

C'est pourquoi, des règles de calcul précises et dédiées au béton armé ont été établies. Elles sont contenues dans le règlement **BAEL** (Béton Armé aux Etats Limites). La dernière version majeure date de 91 mais des modifications mineures ont été réalisées depuis. Le BAEL sera bientôt remplacé par l'**Eurocode 2** unifiant les différents règlements européens.

Béton Armé

[Art. A.1.1 du BAEL]  $\Rightarrow$  Ces règles, basées sur la théorie des états limites, sont applicables à tous les ouvrages en béton armé dont le béton est constitué de granulats naturels normaux et dont le dosage en ciment et au moins égal à  $300 \text{ kg/m}^3$ .

### III. Les Etats Limites

#### III.1. Définition [Art. A.1.2]

Un état limite est un état pour lequel une condition requise d'une construction (ou d'un de ses éléments) est strictement satisfaite et cesserait de l'être en cas de variation défavorable d'une des actions appliquées.

#### III.2. Etat limite de service & Etat limite ultime

La théorie des états limites considère 2 états limites [Art. A.1.2]

##### III.2.a. Etat limite de service (ELS)

Les conditions de bon fonctionnement de la structure ont été atteintes. La durabilité de la structure est remise en cause.

- Etat limite d'ouverture de fissures : risque d'ouverture de fissures.
- Etat limite de compression du béton : on limite volontairement la contrainte de compression à une valeur raisonnable.
- Etat limite de déformation : flèche maximale.

L'état limite de service atteint remet en cause l'aptitude au service de la structure (fissures, fuites, désordres divers). En revanche, la sécurité (c'est à dire sa résistance) n'est pas remise en cause.

##### III.2.b. Etat limite ultime (ELU)

Le dépassement de cet état conduit à la ruine de la structure. Au delà de l'état limite ultime, la résistance des matériaux béton et acier est atteinte, la sécurité n'est plus garantie et la structure risque de s'effondrer.

- Etat limite de l'équilibre statique.
- Etat limite de résistance de l'un des matériaux.
- Etat limite de stabilité de forme : flambement

### IV. Les actions

#### IV.1. Valeurs caractéristiques des actions [Art. A.3.1.]

Les états limites distinguent principalement 2 types d'actions caractéristiques [Art. A.3.1] : les actions permanentes et les actions variables.

Les valeurs attribuées à ces diverses actions sont des valeurs caractéristiques : c'est à dire qu'elles tiennent compte du caractère aléatoire de la valeur des actions (En d'autre termes, il n'est pas possible de déterminer avec précision la valeur de telle ou telle action). Elles sont donc issues d'un calcul probabiliste et acceptent le risque que dans 5% ou 10% des cas la valeur réelle de ces actions dépasse (cas défavorable) la valeur caractéristique retenue.

##### IV.1.a. Les actions permanentes $G_i$ [Art. A.3.1.2]

Les actions permanentes ont une intensité constante ou très peu variable dans le temps.

Elles sont désignées par la lettre  $G$ .

- Poids propre de la structure

Béton Armé

- Cloisons, revêtements, superstructures fixes
- Poussée des terres, de l'eau

#### IV.1.b. Les actions variables $Q_i$ [Art. A.3.1,3]

Les actions variables ont une intensité qui varie fréquemment et de façon importante dans le temps.

Elles sont désignées par la lettre  $Q$ .

- Charges d'exploitation (ratio d'utilisateurs, de véhicules, etc.) classées par durée d'application (provisoire, longue durée)
- Charges climatiques (neige et vent)
- Effets thermiques

### IV.2. Valeurs de calcul des actions [Art. A.3.3]

Pour tenir compte des risques non mesurables, on associe aux valeurs caractéristiques des actions un coefficient de sécurité pour obtenir les valeurs de calcul des actions.

Puis on combine ces valeurs de calcul pour établir le cas de chargement le plus défavorable.

#### IV.2.a. Combinaison d'actions aux ELS [Art. A.3.3,3]

La combinaison d'action courante à l'ELS est la suivante :  $G_{\max} + G_{\min} + Q_1 + \sum y_i Q_i$ <sup>1</sup>

avec :

- $G_{\max}$  : ensemble (somme) des actions permanentes défavorables.
- $G_{\min}$  : ensemble (somme) des actions permanentes favorables.
- $Q_1$  : action variable de base.
- $Q_i$  : autres actions variables d'accompagnement avec leur coefficient  $y_i$ .

Les combinaisons les plus courantes :

- $G + Q + 0.9(S \text{ ou } W)$  (S : snow – W : wind)
- $G + (S \text{ ou } W) + 0.8Q$

#### IV.2.b. Combinaison d'actions aux ELU [Art. A.3.3,2]

La combinaison d'action courante à l'ELU est la suivante :  $1.35G_{\max} + G_{\min} + 1.5Q_1 + \sum 1.3y_i Q_i$

avec :

- $G_{\max}$  : ensemble (somme) des actions permanentes défavorables.
- $G_{\min}$  : ensemble (somme) des actions permanentes favorables.
- $Q_1$  : action variable de base.
- $Q_i$  : autres actions variables d'accompagnement avec leur coefficient  $y_i$ .

Les combinaisons les plus courantes :

- $\left. \begin{matrix} 1.35G \\ G \end{matrix} \right\} + 1.5Q + 1.2(S \text{ ou } W)$
- $\left. \begin{matrix} 1.35G \\ G \end{matrix} \right\} + 1.5(S \text{ ou } W) + 1.04Q$

<sup>1</sup> Tous les coefficients de sécurité sont égaux à 1.

## V. Les matériaux (acier et béton)

### V.1. Résistances caractéristiques du béton

#### V.1.a. Résistance caractéristique en compression $f_{cj}$ [Art. A2.1.11]

Cette résistance ( $f_{cj}$  en Mpa) est obtenue par un grand nombre d'essais de compression jusqu'à rupture sur une éprouvette normalisée 16 cm \* 32 cm (environ 200 cm<sup>2</sup>) cylindrique.

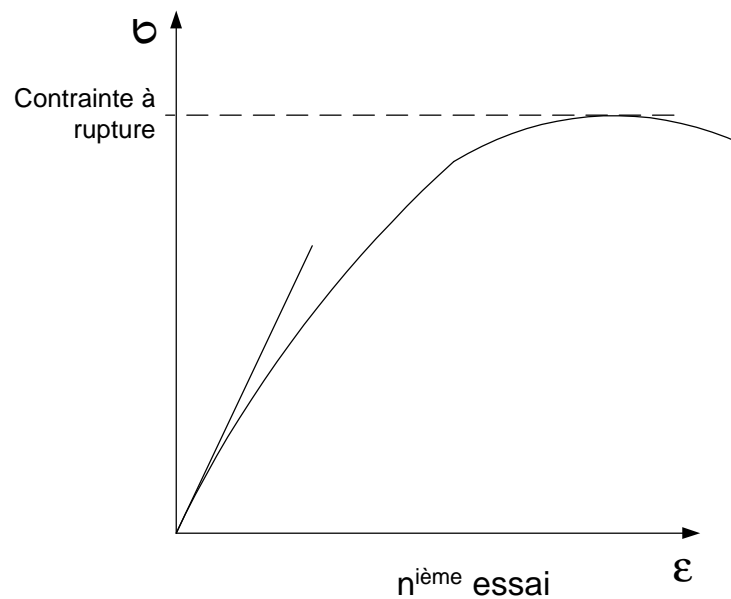


Figure V-1 Courbe de comportement du béton en compression

$f_{cj}$  est le résultat d'un calcul probabiliste qui accepte le risque que dans 5% ou 10% des cas la valeur réelle de résistance du béton soit inférieure (cas défavorable) à  $f_{cj}$  retenue.

Le durcissement du béton étant progressif,  $f_{cj}$  est fonction de l'âge du béton.

Aussi, la valeur conventionnellement retenue pour le calcul des ouvrages est  $f_{c28}$ , la résistance caractéristique du béton à 28 jours.

- Pour  $f_{c28} < 40$  Mpa  $\rightarrow f_{cj} = \frac{j}{4.76 + 0.83j} f_{c28}$  avec  $f_{c28}$  exprimé en Mpa
- Pour  $f_{c28} > 40$  Mpa  $\rightarrow f_{cj} = \frac{j}{1.40 + 0.95j} f_{c28}$

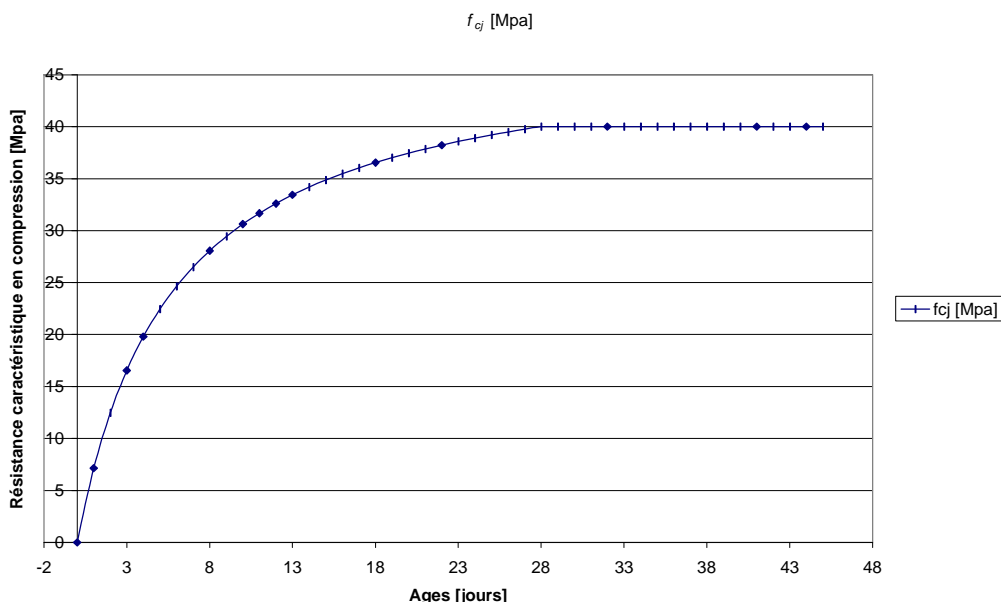


Figure V-2 - Relation réglementaire  $f_{cj}$  en fonction de l'âge du béton (cas  $f_{c28} < 40\text{Mpa}$ )

Classe du ciment $f_{c28}$ [Mpa]	45 et 45 R <sup>2</sup>		55 et 55 R	
	CC <sup>3</sup>	AS <sup>4</sup>	CC	AS
16	300			
20	350	325	325	300
25	*	400	375	350
30	non admis	*	*	*

Tableau V-1 -  $f_{c28}$  en fonction du dosage en ciment et de la classe du ciment [Art. B1.1]

### V.1.b. Résistance caractéristique en traction $f_{tj}$ [Art. A2.1,12]

Il est particulièrement difficile d'obtenir expérimentalement la résistance à la traction du béton.

C'est pourquoi, on retient conventionnellement :  $f_{tj} = 0.6 + 0.06 f_{cj}$  (valable pour  $f_{cj} < 60$  Mpa et  $f_{cj}$  exprimé en Mpa)

Exemple : Pour obtenir un béton de résistance caractéristique en compression  $f_{c28} = 25$  Mpa, il faut :

- un béton de classe 55 dosé à 375 kg/m<sup>3</sup> de ciment s'il est réalisé dans des conditions courantes.
- un béton de classe 55 dosé à 350 kg/m<sup>3</sup> de ciment suffit s'il est réalisé dans des conditions de contrôle améliorées.

La résistance caractéristique en traction  $f_{t28}$  est égale à  $0.6 + 0.06 * 25 = 2.1$  Mpa.

### V.2. Résistance caractéristique de l'acier [Art. A2.2,1]

Quel que soit le type d'acier utilisé, celui ci est supposé se comporter également en traction et compression. Il n'y a donc pas de distinction entre la résistance à la traction et à la compression.

On définit donc la résistance caractéristique de l'acier comme étant sa limite élastique garantie :  $f_e$ .

#### Principales armatures utilisées

<sup>2</sup> R pour rapide.

<sup>3</sup> CC : Conditions Courantes de fabrication du béton.

<sup>4</sup> AS : CC + Auto contrôle Surveillé.

Désignation	Aciers ronds lisses		Aciers à hautes adhérence (HA)		Treillis soudés à fils lisses	Treillis soudés à haute adhérence (HA)
	Fe E 215	Fe E 235	Fe E 400	Fe E 500	TLE 500	Fe TE 500
$f_e$ [Mpa]	215	235	400	500	500	500

Tableau V-2 -  $f_e$  en fonction du type d'acier

Le module d'élasticité longitudinal de l'acier  $E_s^5$  est toujours pris égal à 200 000 Mpa [Art. A2.2,1].

### V.3. Dispositions constructives

#### V.3.a. Enrobage des armatures [Art. A7.1]

Afin de protéger les armatures de la corrosion, celles ci doivent être suffisamment enrobées de béton. Est défini l'enrobage  $e$ .

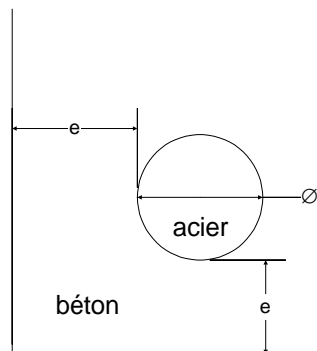


Figure V-3 – Définition de l'enrobage  $e$

L'enrobage  $e$  de toutes armatures est au moins égal à :

- 1 cm : locaux couverts non exposés aux condensations.
- 3 cm : exposé aux intempéries, condensations et liquide ou actions agressives (ramené à 2 cm si  $f_{c28} > 40$  Mpa).
- 5 cm : atmosphère très agressive, mer, embruns.
- ... et toujours supérieur à  $\emptyset$ .

#### V.3.b. Groupements d'aciers [Art. A7.2]

Les armatures sont souvent groupées en paquets. Mais leur disposition doit être compacte et opposer le minimum de gêne lors du coulage du béton (en particulier à cause de la taille des granulats).

On retiendra les dispositions constructives suivantes :

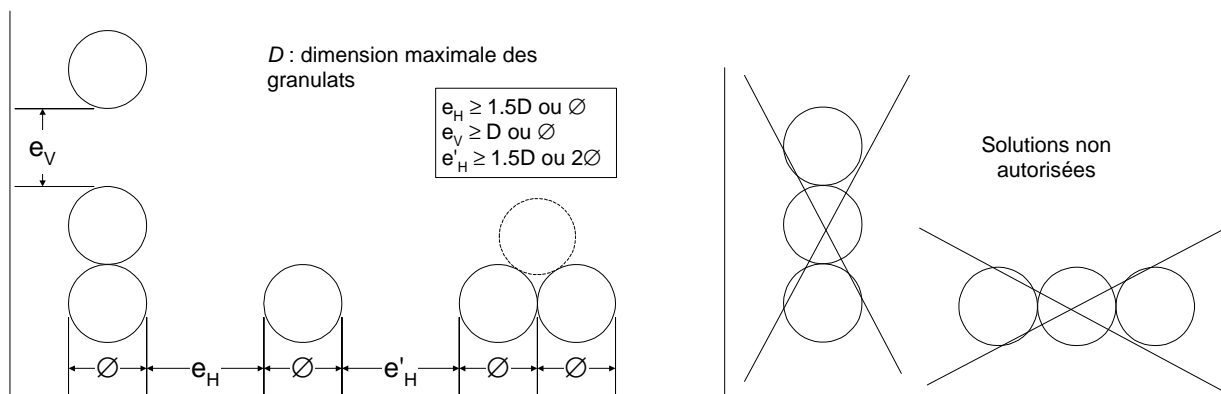


Figure V-4 - Dispositions constructives pour les groupements d'armatures

<sup>5</sup> L'indice  $s$  pour Steel.

## VI. Introduction au calcul

### VI.1. Objectif du calcul

L'objectif de tout calcul est de définir les dimensions du coffrage ainsi que le ferrailage de tous les éléments d'une construction.

### VI.2. Dimensionnement / Vérification

La notion d'états limites introduit un nombre important de conditions. Il faut en effet s'assurer que l'élément de structure étudié satisfasse les conditions imposées par l'ELS mais aussi par l'ELU. C'est pourquoi, le calcul de béton armé est basé sur le principe du dimensionnement / vérification.

Dans un premier temps, une phase de dimensionnement<sup>6</sup> va permettre de déterminer une première valeur de section d'aciers. Ce dimensionnement résulte de l'application d'une seule des dispositions réglementaires.

Dans un deuxième temps, on vérifie que toutes les conditions réglementaires sont satisfaites.

Ainsi dans le cas général, si le dimensionnement exploite une condition de l'ELS, la vérification sera réalisée avec les conditions de l'ELU ou vice-versa.

### VI.3. Méthodologie de calcul

- 1) Evaluation des actions et des combinaisons d'actions
- 2) Etude de résistance des matériaux  $\rightarrow N, V$  et  $M$  et déformations en toute section de l'élément considéré
- 3) Détermination des courbes enveloppes et déduction des « sections dangereuses » (valeurs maximales des sollicitations)
- 4) Dimensionnement au droit de ces « sections dangereuses » des sections d'armatures à l'ELS (ou l'ELU)<sup>7</sup>
- 5) Vérification de ces mêmes sections d'armatures à l'ELU (ou l'ELS)
- 6) Etablissement des plans d'exécution : armatures/coffrages

## VII. Vérification des sections sous contraintes normales - ELS

Les contraintes normales  $\sigma$  sont induites par  $N$  ou  $M$ . Elles sont classiquement présentes dans les tirants, poteaux et poutres.

### VII.1. Hypothèses de calcul [Art. A4.5,1]

- Les sections droites restent planes après déformation
- Pas de glissement relatif entre armatures et béton  $\Rightarrow e_s = e_b$
- Le béton tendue est négligé
- Le béton et acier ont un comportement élastique linéaire
- Conventionnellement, le rapport du module d'élasticité longitudinal de l'acier à celui du béton noté « coefficient d'équivalence  $n$  » est pris égal à 15 :  $E_s/E_b = n = 15$

### VII.2. Conditions imposées par l'ELS

#### VII.2.a. Etat limite de compression du béton [Art. A.4.5,2]

La contrainte de compression dans le béton est limitée à  $0.6f_{cj}$ .

<sup>6</sup> Par comparaison, le pré-dimensionnement est le fruit de l'expérience.

<sup>7</sup> Généralement, un pré-dimensionnement préalable aura fourni les sections de béton.



Pour un béton âgé de plus de 28 jours, il vient :  $s_{bc} \leq f_{b\ ser} = 0.6 f_{c28}$

### VII.2.b. Etat limite d'ouverture de fissures [Art. A.4.5.3]

Pour limiter les fissures, on limite la contrainte dans les armatures tendues. En fonction de la destination de la structure (à découvert, à l'abri, en bord de mer), la taille des fissures sont plus ou moins nocives.

**Cas 1** - fissuration peu préjudiciable (FPP - intérieur) :  $s_{st} \leq f_{s\ ser} = f_e$

- Cas poutre si  $\varnothing > 20$  mm  $\rightarrow e_H \leq 4\varnothing$  et densité d'armature de peau  $3\text{ cm}^2/\text{m}$  soit environ 4HA10 par mètre de paroi [Art. A.8.3]
- Cas dalle  $\rightarrow, e_H \leq \min.(33\text{ cm}, 3h)$  [Art. A.8.2,4]

**Cas 2** – fissuration préjudiciable (FP – extérieur, condensation) :

➤  $s_{st} \leq f_{s\ ser} = \max(240, 110\sqrt{h \cdot f_{ij}})$  avec <sup>8</sup>  $\begin{cases} h = 1 \text{ pour acier lisse} \\ h = 1.6 \text{ pour HA} \end{cases}$  et  $f_{ij}$  exprimé en Mpa

- $\varnothing \geq 6$  mm
- Cas poutre si  $\varnothing > 20$  mm  $\rightarrow e_H \leq 4\varnothing$  et densité d'armature de peau  $3\text{ cm}^2/\text{m}$  (4HA10/m) [Art. A.8.3]
- Cas dalle  $\rightarrow, e_H \leq \min.(25\text{ cm}, 2h)$

**Cas 3** – fissuration très préjudiciable (FTP – milieux agressifs) :

➤  $s_{st} \leq f_{s\ ser} = \max(200, 90\sqrt{h \cdot f_{ij}})$

- $\varnothing \geq 8$  mm
- Cas poutre si  $\varnothing > 20$  mm  $\rightarrow e_H \leq 3\varnothing$  et densité d'armature de peau  $5\text{ cm}^2/\text{m}$  (5HA12/m) [Art. A.8.3]
- Cas dalle  $\rightarrow, e_H \leq \min.(20\text{ cm}, 1.5h)$

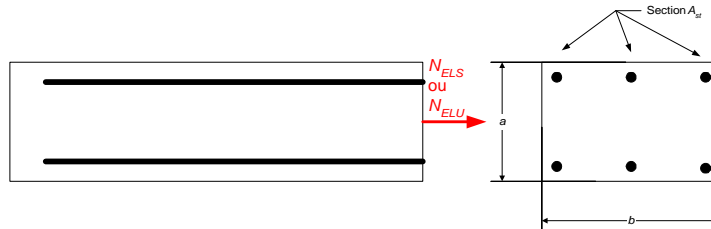
### VII.2.c. Etat limite de déformation

Ce critère n'est généralement pas prépondérant en béton et ne sera pas développé.

## VII.3. Vérification des éléments courants

### VII.3.a. Traction simple

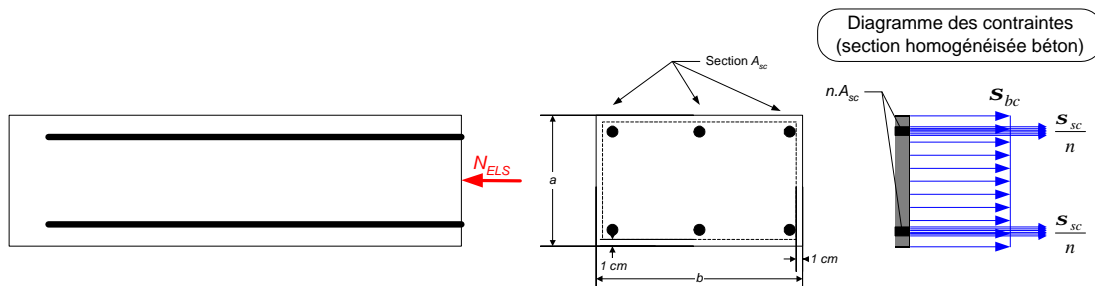
- $N_{ELS}$  connu
- Section d'acier tendue  $A_{st}$  connue



Vérification (Etat limite d'ouverture de fissures) :  $s_{st} = \frac{N_{ELS}}{A_{st}} \leq f_{s\ ser}$

### VII.3.b. Compression simple (compression centrée)

- $N_{ELS}$  connu
- Section d'acier comprimée  $A_{sc}$  connue



<sup>8</sup>  $h$  est appelé coefficient de fissuration.

Vérification (Etat limite de compression du béton) :  $s_{bc} = \frac{N_{ELS}}{\sum_{totale}} = \frac{N_{ELS}}{B_r + nA_{sc}} \leq f_{b\ ser}$

avec  $B_r$  : section réduite du poteau telle que  $B_r = (a - 2\text{ cm})(b - 2\text{ cm})$ .

L'introduction de la section réduite est une manière de soustraire la section des armatures sur la section de béton.

### VII.3.c. Flexion simple

#### 1. Section rectangulaire avec ou sans armatures comprimées

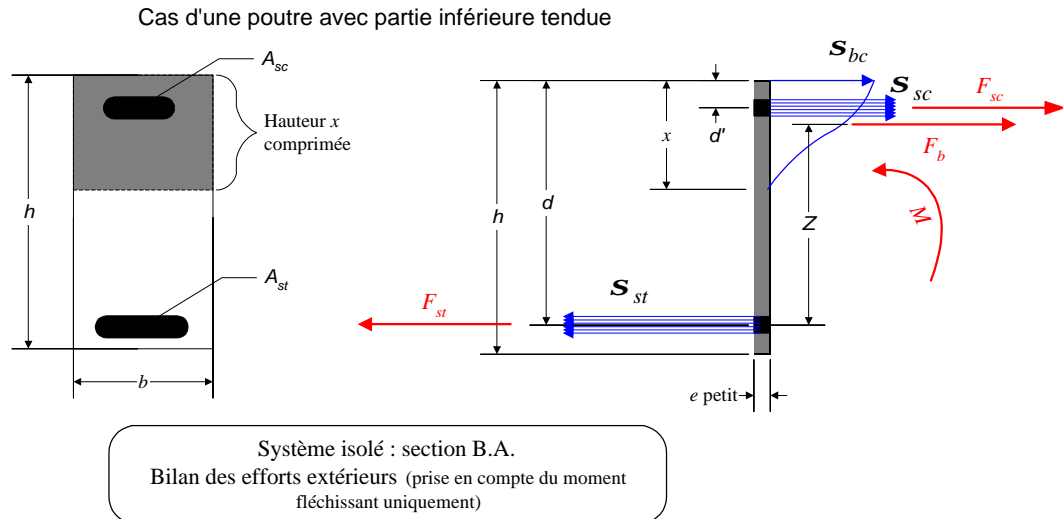


Figure VII-1 - Bilan statique et état des contraintes d'une section de poutre BA

#### Bilan des efforts extérieurs :

- ❑  $F_{st}$ ,  $F_{sc}$  : efforts dans les aciers tendus et comprimés.
- ❑  $F_b$  : effort dans le béton comprimé (nul dans le béton tendu).
- ❑  $M$  : moment de flexion.

#### PFS :

$$F_b + F_{sc} - F_{st} = 0$$

$$\sum M / \text{aciers tendus} = M - F_b Z - F_{sc} (d - d') = 0$$

#### Données :

- ❑  $d$ ,  $d'$ ,  $b$  et  $h$  connues ( $x$  inconnue donc  $Z$  aussi)
- ❑  $M_{ELS}$  connu
- ❑ Sections d'acier  $A_{st}$  et  $A_{sc}$  connues<sup>9</sup>

<sup>9</sup> Seules les sections d'aciers comprimés entourées d'armatures transversales tous les 15  $\emptyset$  sont prises en compte dans  $A_{sc}$ .

Diagramme des déformations

--> linéaire

Diagramme des contraintes (section homogénéisée béton)

Diagramme des résultantes

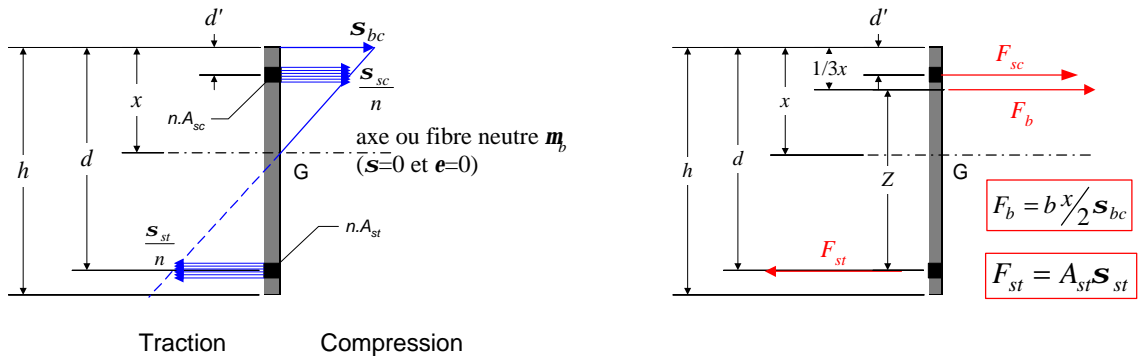


Figure VII-2 - Diagrammes (déformation, contrainte normale et résultantes) à l'ELS en vérification

Conditions à vérifier :

$$\begin{cases} s_{st} \leq f_{s\text{ser}} \\ s_{bc} \leq f_{b\text{ser}} \end{cases} \text{ avec } s(y) = \frac{M_{ELS}}{I} y \text{ valable dans la section homogénéisée béton (attention à la convention de signe} \\ \text{différente de la RdM !).}$$

Recherche de la position de la fibre neutre  $m_b$ , c'est à dire la valeur de  $x$  :

On a :

$$- F_b + F_{sc} - F_{st} = b \cdot \frac{x}{2} s_{bc} + A_{sc} s_{sc} - A_{st} s_{st} = 0 \text{ (PFS)}$$

$$- \frac{s_{bc}}{x} = \frac{s_{st}/n}{(d-x)} = \frac{s_{sc}/n}{(x-d')} \text{ (Thalès)}$$

Il vient alors :  $\frac{bx^2}{2} + nA_{sc}(x-d') - nA_{st}(d-x) = 0$  (équation du 2<sup>ème</sup> degré) d'où déduction de  $x$ . S'il n'y a pas d'armatures comprimées,  $A_{sc}$  est nul.

Détermination du moment quadratique  $I$  :

$I_{\text{axe horizontal}}$  : moment quadratique du béton comprimé + moment quadratique des aciers tendus + moment quadratique des aciers comprimés.

□ béton comprimé :  $I_b = \frac{bx^3}{12} + bx \left( \frac{x}{2} \right)^2 = \frac{bx^3}{3}$  (section rectangulaire + Huyghens)

□ aciers tendus :  $I_{st} = \text{nbre de barres} \cdot \frac{pD_{st}^4}{64} + nA_{st}(d-x)^2 \approx nA_{st}(d-x)^2$  (section circulaire + Huyghens)

□ aciers comprimés :  $I_{sc} = \text{nbre de barres} \cdot \frac{pD_{sc}^4}{64} + nA_{sc}(x-d')^2 \approx nA_{sc}(x-d')^2$  (section circulaire + Huyghens)

Il vient alors :  $I = \frac{bx^3}{3} + nA_{st}(d-x)^2 + nA_{sc}(x-d')^2$ . S'il n'y a pas d'armatures comprimées,  $A_{sc}$  est nul.

Détermination des contraintes extrêmes pour vérification :

□  $s_{st} = n \times \frac{M_{ELS}}{I} (d-x) \leq f_{s\text{ser}}$

□  $s_b = \frac{M_{ELS}}{I} (x) \leq f_{b\text{ser}}$

**2. Section en T avec ou sans armatures comprimées**

Le principe est le même que pour le cas d'une section simplement rectangulaire. Les deux inconnues fondamentales qui doivent être déterminées pour la vérification sont  $x$  et  $I$ .

Deux cas se présentent :

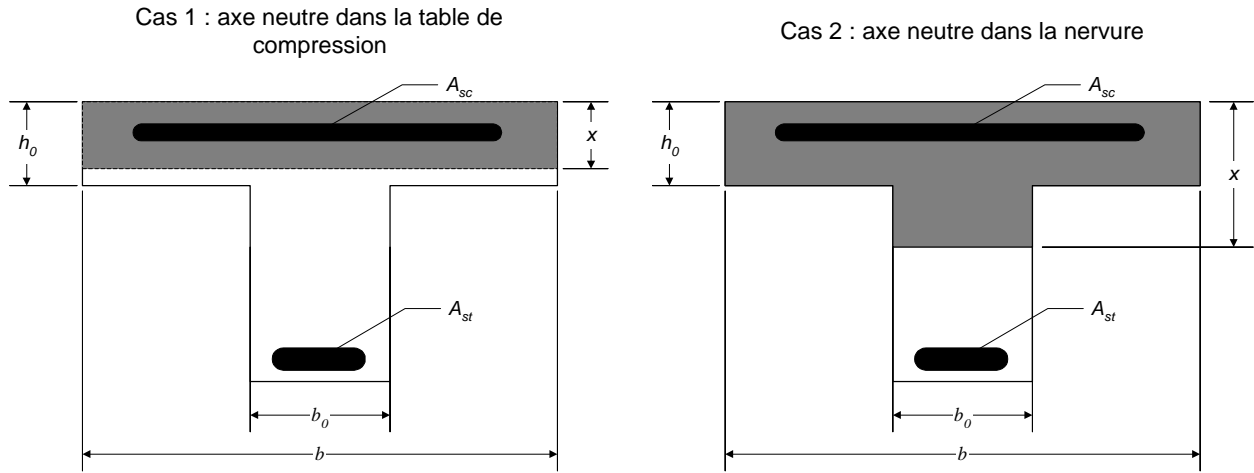


Figure VII-3 - Zones de béton comprimé dans le cas d'une section en T

Pour savoir où se situera l'axe neutre  $x$ , il est nécessaire d'effectuer un premier calcul arbitraire pour déterminer le signe de  $\frac{bx^2}{2} + nA_{sc}(x-d') - nA_{st}(d-x)$  en remplaçant  $x$  par  $h_0$ .

- ❑ Si le signe est positif, l'axe neutre est dans la table de compression (cas 1) → les calculs sont identiques au cas d'une section rectangulaire (les équations ne changent pas).
- ❑ Si le signe est négatif, l'axe neutre est dans la nervure (cas 2) :

→ l'équation pour déterminer  $x$  devient 
$$\frac{bx^2}{2} - \frac{(b-b_0)(x-h_0)^2}{2} + nA_{sc}(x-d') - nA_{st}(d-x) = 0$$

→ l'équation pour déterminer  $I$  devient 
$$I = \frac{bx^3}{3} - \frac{(b-b_0)(x-h_0)^3}{3} + nA_{st}(d-x)^2 + nA_{sc}(x-d')^2$$

**VIII. Vérification des sections sous contraintes normales – ELU**

**VIII.1. Hypothèses générales de calcul [Art. A4.3,2]**

- ❑ Les sections droites restent planes après déformation
- ❑ Pas de glissement relatif entre armatures et béton ⇒  $e_s = e_b$
- ❑ Le béton tendue est négligé
- ❑ Le béton et acier n'ont pas un comportement élastique linéaire. En conséquence, les diagrammes contrainte – déformation de référence pour le béton et l'acier sont précisés ci dessous.

↳ Béton [Art. A4.3,4]

Les diagrammes contrainte ( $s_{bc}$ ) - déformation ( $e_{bc}$ ) utilisables du béton comprimé sont :

- ❑ dans tous les cas : diagramme « parabole rectangle » [Art. A4.3,41]

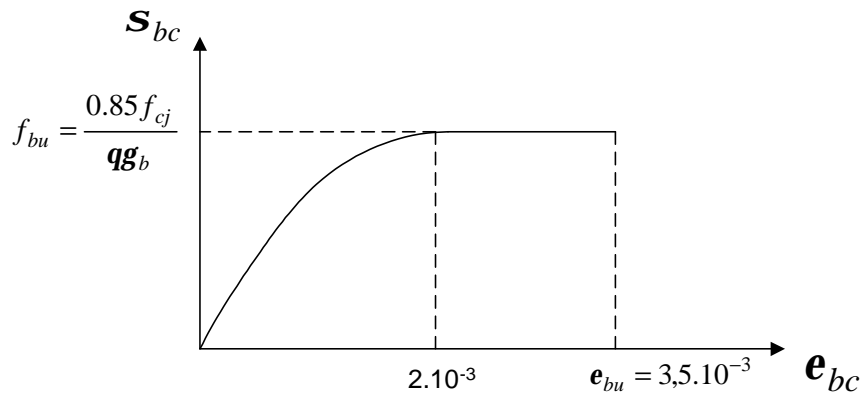


Figure VIII-1 - diagramme "parabole rectangle"

- $f_{bu}$  est la valeur de calcul de la contrainte du béton.
  - Le coefficient  $\theta$  dépend de la durée d'application des charges :  $\theta=1$  si durée > 24 h -  $\theta=0.9$  si 1 h > durée < 24 h.
  - $g_b$  est le coefficient de sécurité :  $g_b=1.5$  (cas courants) -  $g_b=1.15$  (combinaisons accidentelles).
- seulement si la section n'est pas entièrement comprimée : diagramme « rectangulaire simplifié » [Art. A4.3,42]

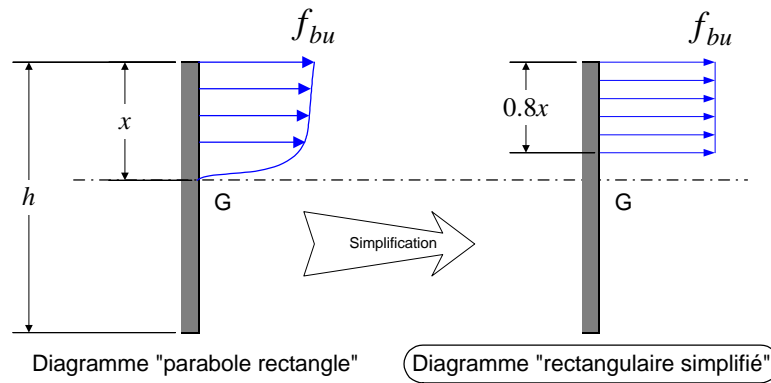


Figure VIII-2 - Passage au diagramme "rectangulaire simplifié"

↳ Acier [Art. A2.2,2] & [Art. A4.3,2]

Le diagramme contrainte ( $s_s$ ) - déformation ( $e_s$ ) utilisable de l'acier est :

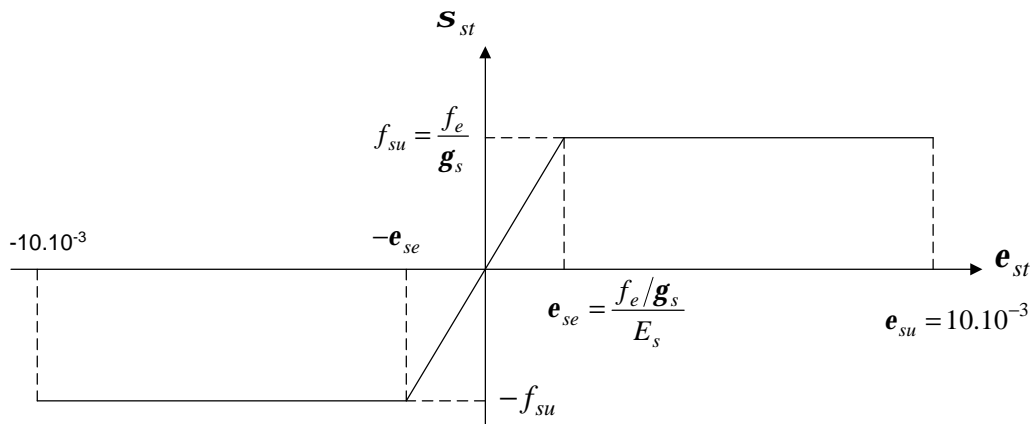


Figure VIII-3 - Diagramme de l'acier aux ELU

- $f_{su}$  est la valeur de calcul de la contrainte de l'acier.
- $g_s$  est le coefficient de sécurité :  $g_s=1.15$  (cas courants) -  $g_s=1$  (combinaisons accidentelles).

Par la suite, on supposera toujours que pour les aciers tendus  $s_{st} = f_{su}$ .

## VIII.2. Conditions imposées par l'ELU

### VIII.2.a. Diagramme des déformations limites dans la section [Art. A4.3,2] & [Art. A4.3,3]

Les déformations au sein d'une section, tout en restant linéaires, sont limitées :

- à 10‰ ( $10 \cdot 10^{-3}$ ) en allongement pour l'acier
- à 3.5‰ ( $3,5 \cdot 10^{-3}$ ) en raccourcissement pour le béton en flexion<sup>10</sup>

Compte tenu de ces conditions limites en déformation, les divers zones de diagrammes de déformation possibles sont :

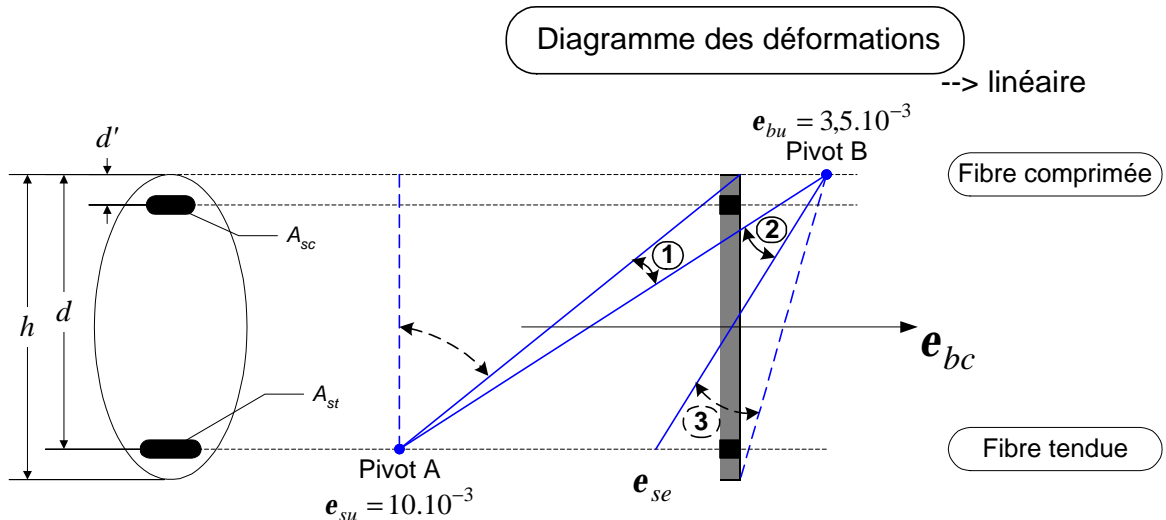


Figure VIII-4 - Diagrammes des déformations limites (ELU)

Pour des raisons pratiques (lors du dimensionnement en particulier), sont définis principalement deux pivots (pivots A et B) autour desquels on supposera que les diagrammes de déformation tourneront.

### VIII.2.b. Etat limite de sollicitations [Art. A4.3,1]

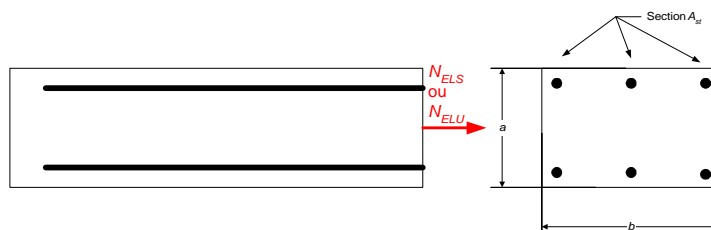
Soit  $N_u$  et  $M_u$  les valeurs limites ultimes de l'effort normal et du moment fléchissant, on doit vérifier :

- En traction ou en compression :  $N_u \geq N_{ELU}$
- En flexion :  $M_u \geq M_{ELU}$

## VIII.3. Vérification des éléments courants

### VIII.3.a. Traction simple

- $N_{ELU}$  connu
- Section d'acier tendue  $A_{st}$  connue



Vérification (Etat limite ultime de sollicitations) :  $N_u = A_{st} f_{su} = A_{st} \frac{f_e}{g_s} \geq N_{ELU}$

<sup>10</sup> et à 2‰ ( $2 \cdot 10^{-3}$ ) en raccourcissement pour le béton en compression simple.

**VIII.3.b. Compression simple (compression centrée) [Art. B8.2]**

Soumis à un effort de compression, un poteau peut s'avérer instable et flamber. Il est donc nécessaire de prendre en compte dans les calculs une longueur fictive du poteau appelée longueur de flambement  $l_f$  à la place de sa longueur réelle (appelée aussi longueur libre)  $l_0$ .

**1. Longueur de flambement [Art. B8.3] et élancement**

La longueur de flambement  $l_f$  dépend du type de liaison présente aux extrémités de l'élément considéré.

**Cas du poteau isolé [Art. B8.3,2]**

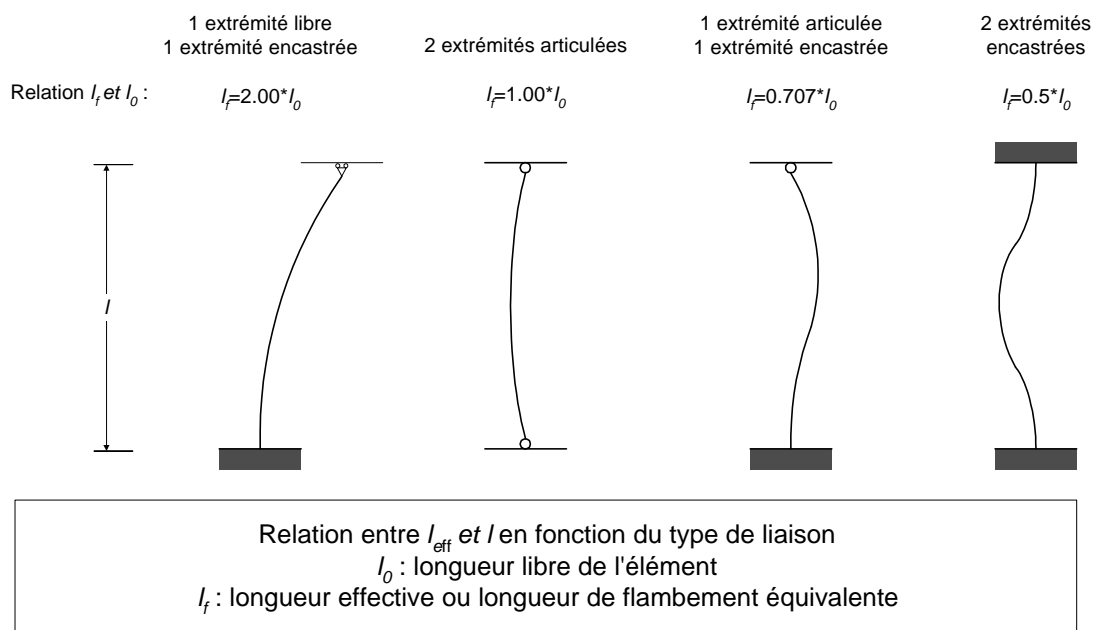


Figure VIII-5 - Relation longueur libre/longueur de flambement

**Cas des bâtiments [Art. B8.3,3]**

Lorsqu'il s'agit de structures complexes type bâtiments, la déduction de la longueur de flambement n'est pas aussi évidente et il est nécessaire de considérer comparativement les diverses rigidités (ou inerties) des poteaux et poutres.

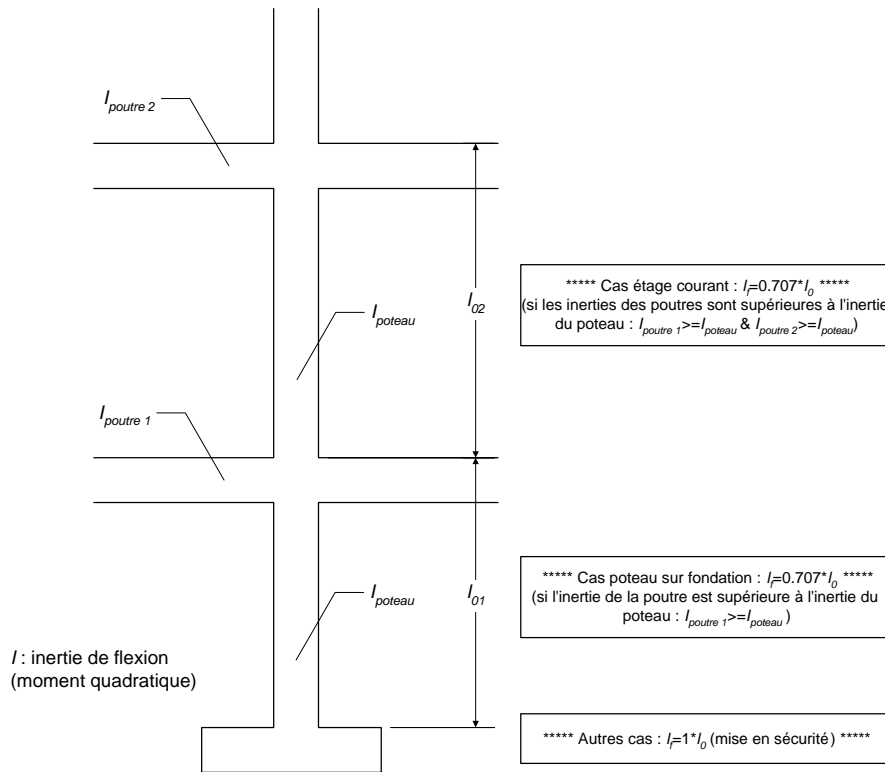


Figure VIII-6 - Longueurs de flambement pour un bâtiment

### Définition de l'élançement

Un fois déterminée la longueur de flambement  $l_f$ , est défini l'élançement  $I = \frac{l_f}{i}$  où :

- $i$  est le rayon de giration :  $i = \sqrt{\frac{I_{\min}}{B}}$
- $I$  est le moment quadratique minimum de la section du poteau
- $B$  est la section du poteau

↳ Exemple

Soit  $a$  et  $b$  les côtés du poteau avec  $a < b$ , il vient :

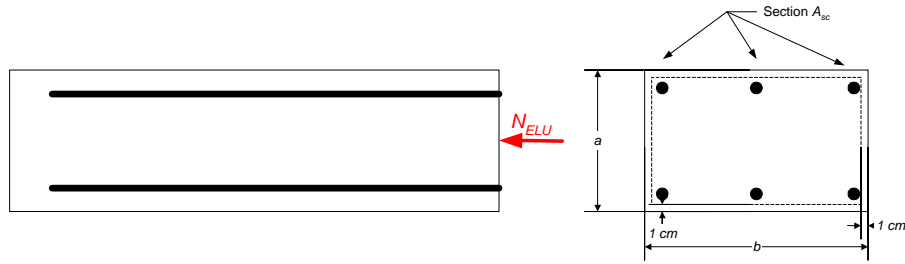
$$\begin{cases} B = a \cdot b \\ I_{\min} = \frac{ba^3}{12} \end{cases} \rightarrow i = \sqrt{\frac{ba^3}{12ab}} = \frac{a}{\sqrt{12}}$$

### 2. Vérification [Art. B8.4]

- $a, b$  et  $l_f$  connues
- $N_{ELU}$  connu
- Section d'acier comprimée  $A_{sc}$  connue<sup>11</sup>

<sup>11</sup> Seules les sections d'aciers comprimées entourées d'armatures transversales tous les 15  $\emptyset$  et jouant effectivement un rôle dans la stabilité au flambement [Art. B8.4,1] sont prises en compte dans  $A_{sc}$ .





Vérification (Etat limite ultime de sollicitations) :  $N_u = a \left[ B_r \frac{f_{c28}}{0.9g_b} + A_{sc} \frac{f_e}{g_s} \right] \geq N_{ELU}$

avec :

- ❑  $B_r$  : section réduite du poteau telle que  $B_r = (a - 2 \text{ cm})(b - 2 \text{ cm})$
- ❑  $a$  : coefficient<sup>12</sup> fonction de  $I$ 
  - $I \leq 50 \rightarrow a = \frac{0.85}{1 + 0.2 \left( \frac{I}{35} \right)^2}$
  - $50 \leq I \leq 70 \rightarrow a = 0.6 \left( \frac{50}{I} \right)^2$

**VIII.3.c. Flexion simple (sections rectangulaires seulement)**

Seules les sections de type rectangulaire simple avec ou sans armatures comprimées seront « vérifiées » par exploitation directe des conditions de l'ELU citées au VIII.2. Le cas des sections en Té ne sera pas traité dans le cas de la vérification (voir le § X.2.c.5).

Cas d'une poutre avec partie inférieure tendue

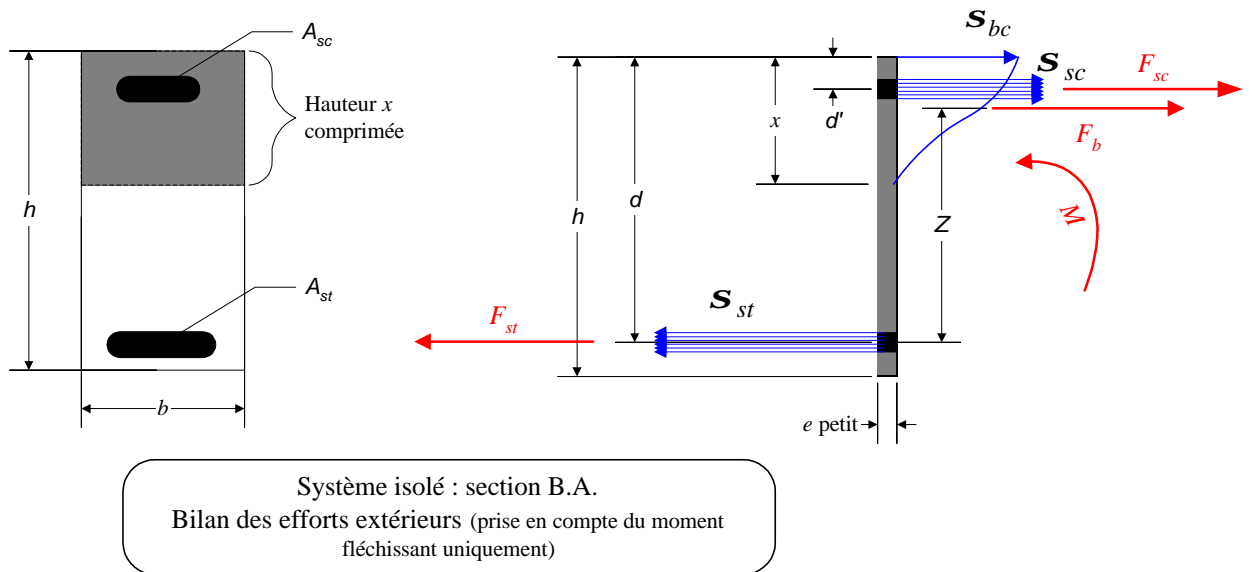


Figure VIII-7 - Bilan statique et état des contraintes d'une section de poutre BA sans aciers comprimés

En outre et dans un objectif de simplification, l'ensemble des calcul seront menés avec le diagramme rectangulaire simplifié.

**Bilan des efforts extérieurs :**

- ❑  $F_{st}$ ,  $F_{sc}$  : efforts dans les aciers tendus et comprimés.
- ❑  $F_b$  : effort dans le béton comprimé (nul dans le béton tendu).
- ❑  $M$  : moment de flexion.

<sup>12</sup> Si plus de la moitié de la charge est appliquée avant 90 jours,  $a$  est à diviser par 1.10. Si la charge est appliquée avant 28 jours,  $a$  est à diviser par 1.20.

Béton Armé

PFS :

$$F_b + F_{sc} - F_{st} = 0$$

$$\sum M / \text{aciers tendus} = M - F_b Z - F_{sc} (d - d') = 0$$

Données :

- ❑  $d, d', b$  et  $h$  connues ( $x$  inconnue donc  $Z$  aussi)
- ❑  $M_{ELU}$  connu
- ❑ Sections d'acier  $A_{st}$  et  $A_{sc}$  connues<sup>13</sup>

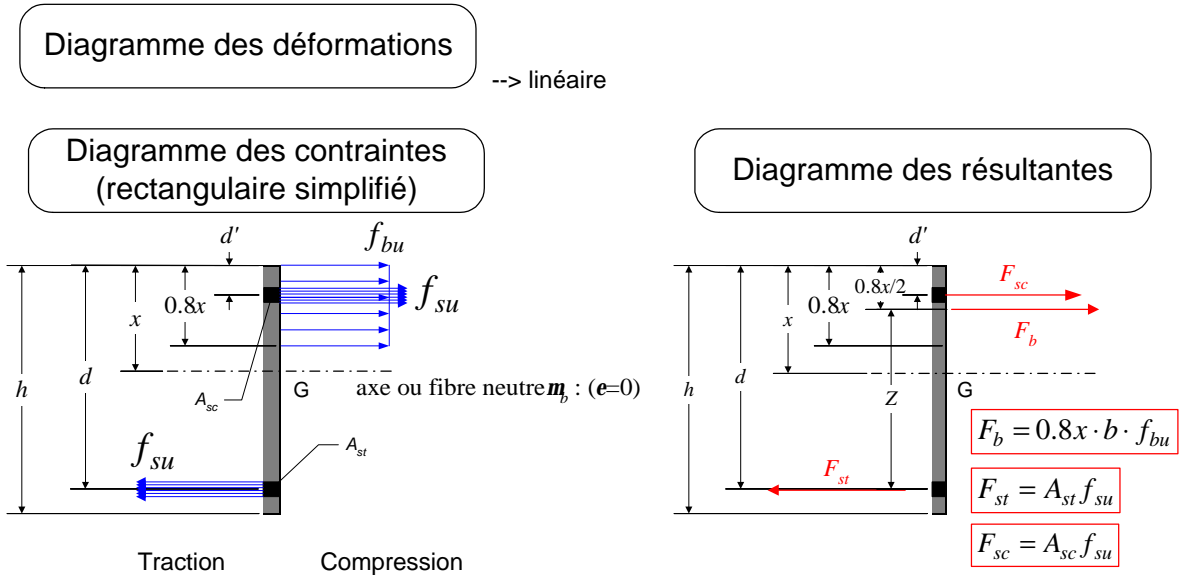


Figure VIII-8 - Diagrammes (déformation, contrainte normale et résultantes) à l'ELU en vérification

Pour simplifier l'écriture, on pose :  $\mathbf{a} = \frac{x}{d}$

Condition à vérifier :

Vérification (Etat limite ultime de sollicitations) :  $M_u = ZF_b + F_{sc} (d - d') \geq M_{ELU}$

Les inconnues sont  $Z$  et  $F_b$ .

Recherche de  $x$  et donc  $Z$  :

On a  $F_b + F_{sc} - F_{st} = 0.8xbf_{bu} + A_{sc}f_{su} - A_{st}f_{su} = 0$

↳ En conséquence :  $x = \frac{f_{su}}{0.8bf_{bu}} (A_{st} - A_{sc})$

↳ Il vient alors :  $Z = d - 0.8/2 x = d(1 - 0.4a)$

Calcul de  $M_u$  :

$$M_u = (d - 0.8/2 x) 0.8xbf_{bu} + A_{sc}f_{su} (d - d')$$

<sup>13</sup> Seules les sections d'aciers comprimées entourées d'armatures transversales tous les 15 Ø sont prises en compte dans  $A_{sc}$ .

## IX. Dimensionnement des sections sous contraintes normales – ELS

### IX.1. Hypothèses et conditions ELS

- ❑ Les hypothèses détaillées lors de l'élaboration des méthodes de vérification à l'ELS restent valables : voir les § VII.1 et VII.2 page 8.

En outre, on supposera toujours que les aciers tendus travaillent au maximum autorisé par l'ELS :  $s_{st} = f_{s\ ser}$

### IX.2. Dimensionnement des éléments courants

#### IX.2.a. Traction simple

- ❑  $a, b$  les côtés du poteau avec  $a < b$  connues
- ❑  $N_{ELS}$  connu

#### Equation de dimensionnement :

$$\text{Etat limite d'ouverture de fissures : } A_{st} \geq \frac{N_{ELS}}{f_{s\ ser}}$$

#### Dispositions constructives

- ❑ Armatures longitudinales :

Dans le cas d'un recouvrement d'armatures longitudinales, il convient de respecter une longueur minimum de recouvrement appelée « longueur de scellement droit »  $l_s$  (pour plus de détail, voir l'article A6.1).

- ❑ Armatures transversales :

➤  $\varnothing_t \geq \frac{3}{10}\varnothing$  où  $\varnothing_t$  est le diamètre des armatures transversales.

➤  $s_t \leq a$  en zone courante ( $s_t$  est l'espacement entre les cours successifs d'armatures transversales et  $a$  est la plus petite des dimensions transversales du poteau).

#### IX.2.b. Compression simple (compression centrée)

- ❑  $a, b$  les côtés du poteau avec  $a < b$  connues
- ❑  $N_{ELS}$  connu

#### Equation de dimensionnement :

$$\text{Etat limite de compression du béton : } A_{sc} \geq \frac{1}{n} \left( \frac{N_{ELS}}{f_{b\ ser}} - B_r \right)$$

avec  $B_r$  : section réduite du poteau telle que  $B_r = (a - 2 \text{ cm})(b - 2 \text{ cm})$ .

#### Dispositions constructives

- ❑ Armatures longitudinales [Art. A8.1,2] :  $\max(4p; 0.2\% B) \leq A_{sc} \leq 5\% B$

où :

➤  $B$  est la section du poteau.

➤  $p$  est le périmètre du poteau exprimé en cm, soit  $p = 2(a + b)$ .

Par ailleurs, il convient de positionner les armatures longitudinales au voisinage des parois susceptibles d'être les plus sollicitées par des phénomènes de flambement.

Dans le cas d'un recouvrement d'armatures longitudinales, il convient de respecter une longueur minimum de recouvrement appelée « longueur de scellement droit »  $l_s$  (pour plus de détail, voir l'article A6.1). Dans le cas d'armatures comprimées, la longueur de recouvrement peut être limitée à  $0.6l_s$  [Art. A6.1,2].

- ❑ Armatures transversales [Art. A8.1,3] :

➤  $5 \text{ mm} \leq \varnothing_t \leq 12 \text{ mm}$  et  $\varnothing_t \geq \frac{3}{10}\varnothing$  où  $\varnothing_t$  est le diamètre des armatures transversales.

➤  $s_t \leq \min(15\varnothing; 40 \text{ cm}; a + 10 \text{ cm})$  où  $a$  est la plus petite des dimensions transversales du poteau.

## Béton Armé

- Dans les zones de recouvrement des aciers longitudinaux, il convient de disposer trois cours d'armatures transversales.

### IX.2.c. Flexion simple

Le dimensionnement aux ELS est généralement le critère prépondérant pour les conditions de fissuration préjudiciable (FP) et très préjudiciable (FTP), deux situations typiques des ouvrages de travaux publics qui sont systématiquement en extérieur. Il est logiquement suivi d'une vérification aux ELU.

Lorsqu'il s'agit de dimensionner une poutre en flexion, les inconnues sont tout autant les côtes de la section de béton ( $h$  et  $b$ ) que les sections d'acier ( $A_{st}$  et  $A_{sc}$ ).

Pratiquement, on se donne « à priori » la section de béton et le calcul se passe ensuite en deux temps :

1. Evaluation de la capacité de la section béton à reprendre le moment de flexion sans armatures comprimées → calcul du moment résistant béton  $M_{rb}$ .
2. Dimensionnement effective des armatures tendues et éventuellement des armatures comprimées.

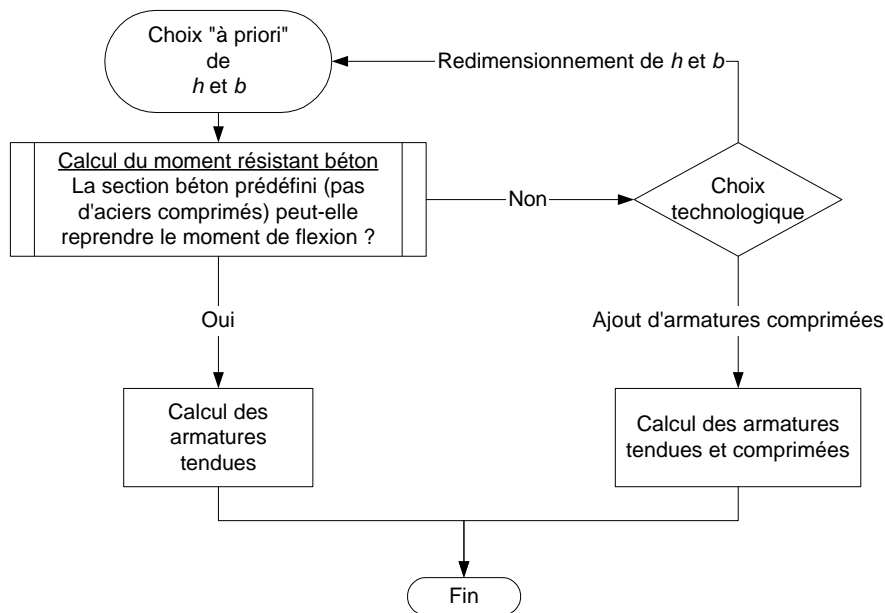


Figure IX-1 - Organigramme décisionnel pour le dimensionnement ELS

### 1. Evaluation du moment résistant béton $M_{rb}$

Celui ci s'évalue sans armatures comprimées et en supposant les contraintes aciers et béton au maximum autorisé par l'ELS.

#### Bilan des efforts extérieurs et PFS :

- ❑  $F_{st}$ ,  $F_b$  et  $M$ .
- ❑  $F_b - F_{st} = 0$  et  $\sum M / \text{aciers tendus} = M - F_b Z = 0$  ou  $\sum M / \text{béton comprimé} = M - F_{st} Z = 0$

#### Données :

- ❑  $d$ ,  $b$  et  $h$  connues
- ❑  $M_{ELS}$  connu

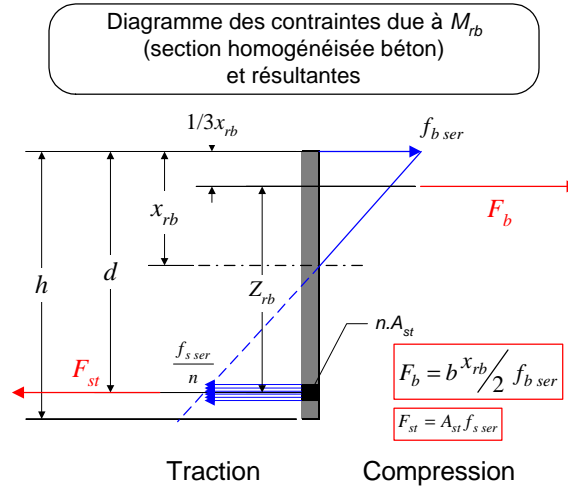


Figure IX-2 - Diagramme des contraintes normales et bilan des résultantes induits par  $M_{rb}$

Condition à vérifier et conclusions :

- $M_{rb} \geq M_{ELS}$  → pas d'armatures comprimées
- $M_{rb} < M_{ELS}$  → armatures comprimées nécessaires

avec  $M_{rb} = Z_{rb} F_b$  (PFS)

Recherche de  $x_{rb}$  et donc  $Z_{rb}$  :

On a : 
$$\frac{f_{b\ ser} + \frac{f_{s\ ser}}{n}}{d} = \frac{f_{b\ ser}}{x_{rb}}$$
 (Thalès)

↳ En conséquence : 
$$x_{rb} = d \frac{f_{b\ ser}}{f_{b\ ser} + \frac{f_{s\ ser}}{n}} = d \frac{0.6 f_{c28}}{0.6 f_{c28} + \frac{f_{s\ ser}}{15}}$$
 ou bien 
$$a_{rb} = \frac{x_{rb}}{d} = \frac{0.6 f_{c28}}{0.6 f_{c28} + \frac{f_{s\ ser}}{15}}$$

↳ Il vient alors : 
$$Z_{rb} : Z_{rb} = d - \frac{1}{3} x_{rb} = d \left( 1 - \frac{a_{rb}}{3} \right)$$

Calcul de  $M_{rb}$  :

$$M_{rb} = Z_{rb} F_b = d \left( 1 - \frac{a_{rb}}{3} \right) \frac{x_{rb}}{2} b f_{b\ ser} = \frac{0.6}{2} \left( 1 - \frac{a_{rb}}{3} \right) b d^2 a_{rb} f_{c28}$$

**2. Section rectangulaire sans armatures comprimées (cas  $M_{rb} \geq M_{ELS}$ )**

Bilan des efforts extérieurs et PFS :

- $F_{st}$ ,  $F_b$  et  $M$ .
- $F_b - F_{st} = 0$  et  $\sum M / \text{aciers tendus} = M - F_b Z = 0$  ou  $\sum M / \text{béton comprimé} = M - F_{st} Z = 0$

Données :

- $d$ ,  $b$  et  $h$  connues ( $x$  inconnue donc  $Z$  aussi)
- $M_{ELS}$  connu

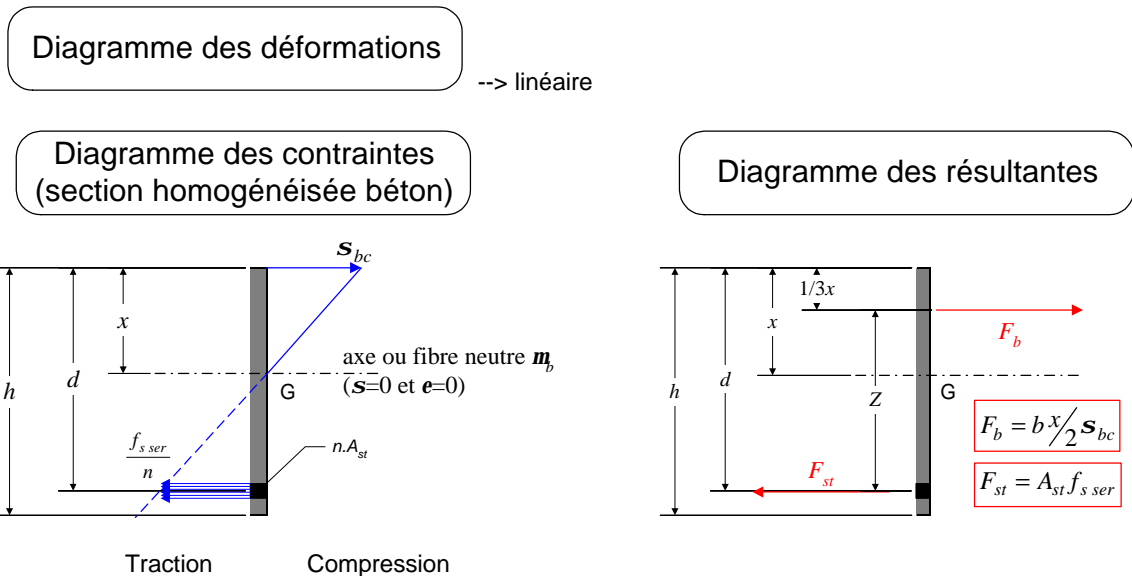


Figure IX-3 – Diagrammes (déformation, contrainte normale et résultantes) à l'ELS en dimensionnement

Equation de dimensionnement :

$$A_{st} \geq \frac{M_{ELS}}{f_{s\ ser} Z} \text{ (PFS)}$$

La seule inconnue dans cette équation est Z (ou x ou encore **a** car  $Z = d - \frac{1}{3}x = d \left(1 - \frac{a}{3}\right)$ ).

Recherche de la valeur de Z, c'est à dire la position de la fibre neutre :

On a :

$$\square F_b - F_{st} = b \frac{x}{2} s_{bc} - A_{st} f_{s\ ser} = 0 \text{ (PFS)}$$

$$\square \frac{s_{bc}}{x} = \frac{f_{s\ ser}}{d - x} \text{ (Thalès)}$$

↳ Il vient alors une équation du 3<sup>ème</sup> degré fonction de **a** !

Sa résolution complexe ne sera pas abordée en détail. Une technique simplifiée permet d'aboutir à la solution.

1) On calcule **a** avec l'équation  $\cos(3a) = \left(\frac{2m \cdot n}{f_{s\ ser}} + 1\right)^{-1.5}$  avec  $m = \frac{M_{ELS}}{bd^2}$

2) On obtient  $a = 1 - 2 \sqrt{\frac{2m \cdot n}{f_{s\ ser}} + 1} \times \cos(a + 60^\circ)$  avec **a** en degré.

3) On en déduit  $Z = d \left(1 - \frac{a}{3}\right)$  ou  $x = \frac{a}{d}$

**3. Section rectangulaire avec armatures comprimées (cas  $M_{rb} < M_{ELS}$ )**

Dans ce cas, il existe en fait deux solutions :

- 1) Re dimensionner **h** ou **b** jusqu'à inverser l'inégalité.
- 2) Ajouter effectivement des aciers comprimés. C'est l'objet de ce qui suit.

Le problème est décomposé en deux sous - problème précisés dans le graphique suivant :

## Béton Armé

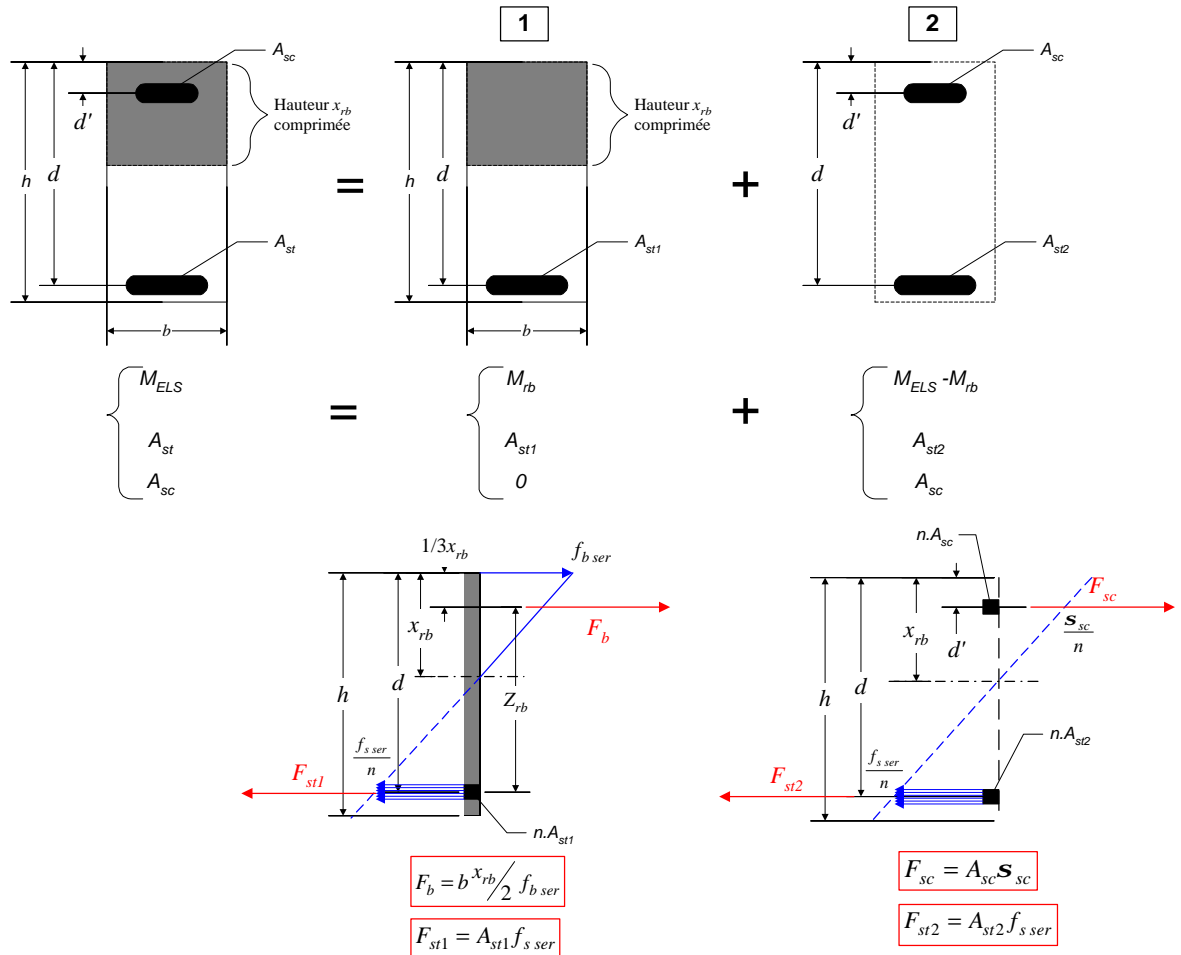


Figure IX-4 – Décomposition et diagrammes (déformation, contrainte normale et résultantes) à l'ELS en dimensionnement avec aciers comprimés

Le principe de superposition va permettre d'additionner les différentes sections d'aciers obtenues.

### Bilan des efforts extérieurs et PFS :

- ❑ Problème 1 : voir le § Evaluation du moment résistant béton  $M_{rb}$  page 20.
- ❑ Problème 2 :
  - $F_{st}$ ,  $F_{sc}$  et  $M$ .
  - $F_{sc} - F_{st} = 0$
  - $\sum M / \text{aciers tendus} = M - F_{sc}(d - d') = 0$  ou  $\sum M / \text{aciers comprimés} = M - F_{st}(d - d') = 0$

### Données :

- ❑  $d$ ,  $d'$ ,  $b$ ,  $h$  et  $x_{rb}$  (donc  $Z_{rb}$  aussi) connues
- ❑  $M_{rb}$  et  $M_{ELS}$  connus

### Equations de dimensionnement :

- ❑ Problème 1 :  $A_{st1} \geq \frac{M_{rb}}{f_{s,ser} Z_{rb}}$  (PFS)
  - ❑ Problème 2 :  $A_{st2} \geq \frac{M_{ELS} - M_{rb}}{f_{s,ser}(d - d')}$  et  $A_{sc} \geq \frac{M_{ELS} - M_{rb}}{s_{sc}(d - d')}$  (PFS)
- ↪ Il vient alors :  $A_{st} \geq \frac{M_{rb}}{f_{s,ser} Z_{rb}} + \frac{M_{ELS} - M_{rb}}{f_{s,ser}(d - d')}$  et  $A_{sc} \geq \frac{M_{ELS} - M_{rb}}{s_{sc}(d - d')}$

La seule inconnue dans cette équation est  $s_{sc}$ , la contrainte dans les aciers comprimés.





Béton Armé

Dimensionnement (Etat limite ultime de sollicitations) :  $A_{st} \geq \frac{N_{ELU}}{f_{su}} = N_{ELU} \frac{g_s}{f_e}$

En outre, les dispositions constructives relatives aux armatures longitudinales et transversales citées au § IX.2.a page 19 restent applicables.

### X.2.b. Compression simple (compression centrée)

□  $a, b$  les côtés du poteau avec  $a < b$  et  $l_f$  connues

□  $N_{ELU}$  connu

Dimensionnement :  $A_{sc} \geq \left[ \frac{N_{ELU}}{a} - B_r \frac{f_{c28}}{0.9 \cdot g_b} \right] \frac{g_s}{f_e}$

avec  $B_r$  section réduite du poteau et  $a$  coefficient fonction de  $I$  (cf. VIII.3.b.2 page 16).

En outre, les dispositions constructives relatives aux armatures longitudinales et transversales citées au § IX.2.b page 19 restent applicables.

### X.2.c. Flexion simple

Le dimensionnement aux ELU est généralement le critère prépondérant pour les conditions de fissuration peu préjudiciable (FPP) situation rare sur les ouvrages de travaux publics. C'est pourquoi le dimensionnement aux ELU est généralement entrepris pour les éléments de bâtiment. Il est logiquement suivi d'une vérification aux ELS.

Lorsqu'il s'agit de dimensionner une poutre en flexion, les inconnues sont tout autant les côtes de la section de béton ( $h$  et  $b$ ) que les sections d'acier ( $A_{st}$  et  $A_{sc}$ ).

Pratiquement, on se donne « à priori » la section de béton et le calcul se passe ensuite en deux temps :

1. Evaluation de la capacité de la section béton à reprendre le moment de flexion sans armatures comprimées → comparaison de la droite de déformation réelle aux deux droites de déformations suivantes :
  - Droite A – B (passant par les pivots A et B)
  - Droite  $e_{se}$  - B (passant par la déformation acier tendu  $e_{se} = 2\text{‰}$  et le pivot B)
2. Dimensionnement effective des armatures tendues et éventuellement des armatures comprimées.

L'ensemble des calcul sont menés avec le diagramme rectangulaire simplifié.

### **1. Caractérisation des droites de déformation A – B et $e_{se}$ - B**

Celles ci s'obtiennent dans l'hypothèse de l'absence d'armatures comprimées.

#### Bilan des efforts extérieurs et PFS :

□  $F_{st}$ ,  $F_b$  et  $M$ .

□  $F_b - F_{st} = 0$  et  $\sum M / \text{aciers tendus} = M - F_b Z = 0$  ou  $\sum M / \text{béton comprimé} = M - F_{st} Z = 0$

#### Données :

□  $d, b$  et  $h$  connues

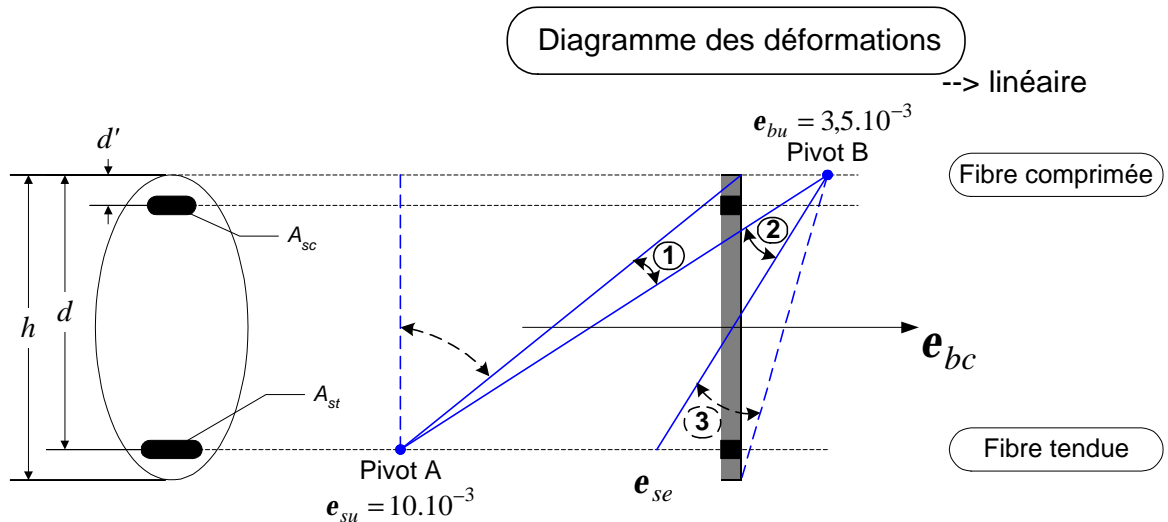


Figure X-1 - Diagrammes des déformations limites (ELU)

Droite de déformation A - B

Cette droite de déformation est la droite passant par les pivots A et B simultanément.

- ❑ Expression de  $x_{A-B}$  :  $\frac{x_{A-B}}{3,5 \cdot 10^{-3}} = \frac{d}{3,5 \cdot 10^{-3} + 10 \cdot 10^{-3}}$  (Thalès)  $\rightarrow x_{A-B} = \frac{3,5}{13,5} d$
- ❑ Expression de  $a_{A-B} = \frac{x_{A-B}}{d} = \frac{3,5}{13,5} \rightarrow \boxed{a_{A-B} = 0,259 \text{ (constante)}}$
- ❑ Expression du moment correspondant  $M_{A-B} = F_b Z_{A-B} = 0,8 b x_{A-B} f_{bu} (d - 0,8/2 x_{A-B}) \rightarrow M_{A-B} = 0,1857 b d^2 f_{bu}$
- ❑ Expression du moment réduit correspondant  $m_{A-B} = \frac{M_{A-B}}{b d^2 f_{bu}} \rightarrow \boxed{m_{A-B} = 0,1857 \text{ (constante)}}$

Droite de déformation e\_se - B

Cette droite de déformation est la droite passant par la déformation e\_se et B simultanément.

Rappel :  $e_{se} = \frac{f_e}{g_s E_s}$

- ❑ Expression de  $x_{e_{se}-B}$  :  $\frac{x_{e_{se}-B}}{3,5 \cdot 10^{-3}} = \frac{d}{3,5 \cdot 10^{-3} + e_{se}}$  (Thalès)  $\rightarrow x_{e_{se}-B} = \frac{3,5 \cdot 10^{-3} d}{3,5 \cdot 10^{-3} + e_{se}}$
- ❑ Expression de  $Z_{e_{se}-B} = d - 0,8/2 x_{e_{se}-B}$
- ❑ Expression de  $\boxed{a_{e_{se}-B} = \frac{3,5 \cdot 10^{-3}}{3,5 \cdot 10^{-3} + e_{se}}}$
- ❑ Expression du moment correspondant  $M_{e_{se}-B} = F_b Z_{e_{se}-B} = 0,8 b x_{e_{se}-B} f_{bu} (d - 0,8/2 x_{e_{se}-B})$  soit en fonction de  $a_{e_{se}-B} \rightarrow M_{e_{se}-B} = 0,8 b a_{e_{se}-B} f_{bu} d^2 (1 - 0,4 a_{e_{se}-B})$
- ❑ Expression du moment réduit correspondant  $m_{e_{se}-B} = \frac{M_{e_{se}-B}}{b d^2 f_{bu}} \rightarrow \boxed{m_{e_{se}-B} = 0,8 a_{e_{se}-B} (1 - 0,4 a_{e_{se}-B})}$

La dernière équation fournit aussi la relation inverse :  $\boxed{a_{e_{se}-B} = 1,25 (1 - \sqrt{1 - 2 m_{e_{se}-B}})}$

Récapitulatif

- ❑ Les diverses valeurs expression de la droite de déformation A - B sont des constantes.
- ❑ Les diverses valeurs expression de la droite de déformation e\_se - B sont fonction uniquement du type d'acier.

Le tableau suivant donne les valeurs pour les deux nuances d'acier principales.

Nuance d'acier	Droite de déformation A - B		Droite de déformation $e_{se}$ - B	
feE400	$a_{A-B}=0.259$	$m_{A-B}=0.1857$	$a_{e_{se}-B}=0.668$	$m_{e_{se}-B}=0.3916$
feE500	$a_{A-B}=0.259$	$m_{A-B}=0.1857$	$a_{e_{se}-B}=0.6168$	$m_{e_{se}-B}=0.3716$

Tableau X-1 - Tableau récapitulatif des 2 droites de déformation caractéristiques à l'ELU

## 2. Initialisation du calcul et détermination de la nécessité éventuelle d'aciers comprimés

### Bilan des efforts extérieurs et PFS :

- $F_{st}$ ,  $F_b$  et  $M$ .
- $F_b - F_{st} = 0$  et  $\sum M / \text{aciers tendus} = M - F_b Z = 0$  ou  $\sum M / \text{béton comprimé} = M - F_{st} Z = 0$

### Données :

- $d$ ,  $b$  et  $h$  connues
- $M_{ELU}$  connu

### Calculs initiaux :

1. Calculer le moment réduit réel tel que  $m_{ELU} = \frac{M_{ELU}}{bd^2 f_{bu}}$
2. En déduire  $a_{ELU} = 1.25 \left( 1 - \sqrt{1 - 2m_{ELU}} \right)$ ,  $x_{ELU} = a_{ELU} \cdot d$  et  $Z_{ELU} = d - \frac{0.8}{2} x_{ELU}$
3. Détermination du type de pivot et de l'existence d'aciers comprimés.
  - Si  $a_{ELU} \leq a_{A-B}$  ou  $m_{ELU} \leq m_{A-B}$  : pivot A – zone 1 : les aciers travaillent au maximum de leur déformation (On ne peut dépasser la limite du pivot A pour les aciers !), par contre le béton est en dessous de sa limite en déformation. Pas besoin d'armatures comprimés.
  - Si  $a_{A-B} \leq a_{ELU} \leq a_{e_{se}-B}$  ou  $m_{A-B} \leq m_{ELU} \leq m_{e_{se}-B}$  : pivot B – zone 2 : c'est le béton qui travaille au maximum de sa déformation (On ne peut dépasser la limite du pivot B pour le béton !) et l'acier qui, tout en restant dans le domaine plastique, travaille en deçà de sa limite de déformation. Pas besoin d'armatures comprimés.
  - Si  $a_{e_{se}} < a_{ELU}$  ou  $m_{e_{se}-B} < m_{ELU}$  : pivot B avec armatures comprimées nécessaires (On ne dépasse toujours pas la déformation limite du béton, en revanche la contrainte dans le béton dépasserait sa limite si des armatures comprimées ne sont pas ajoutées. D'autre part, on ne permet pas à l'acier de passer en deçà de sa limite élastique en déformation). Si aucune armatures comprimées n'étaient ajoutées, on passerait dans la zone 3.

## 3. Section rectangulaire sans armatures comprimées (cas $m_{ELU} \leq m_{e_{se}-B}$ )

Dimensionnement (Etat limite ultime de sollicitations) :  $A_{st} \geq \frac{M_{ELU}}{f_{su} Z_{ELU}}$

## 4. Section rectangulaire avec armatures comprimées (cas $m_{ELU} \geq m_{e_{se}-B}$ )

Le problème est décomposé en deux sous - problèmes précisés dans le graphique suivant :

## Béton Armé

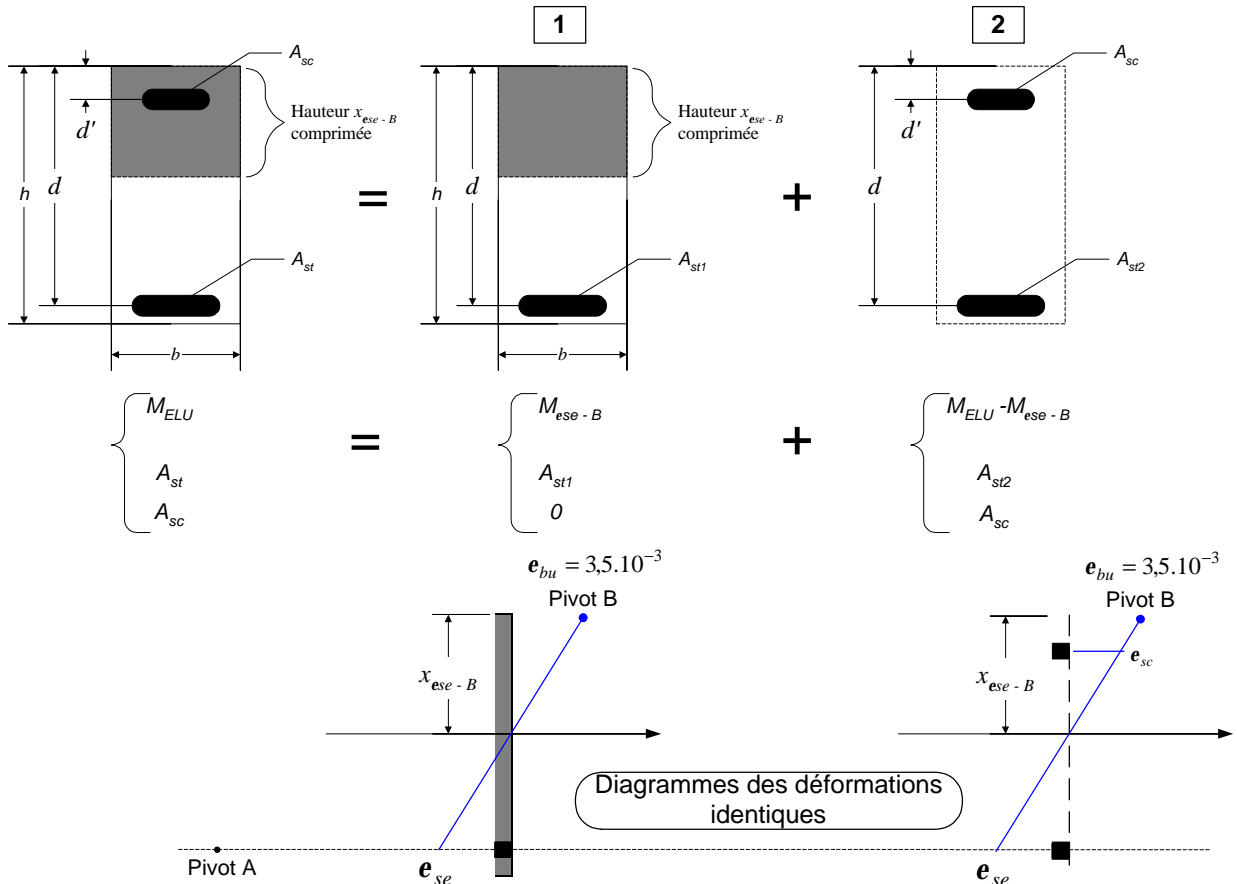


Figure X-2 – Décomposition et diagrammes (déformation, contrainte normale et résultantes) à l'ELU en dimensionnement avec aciers comprimés

Le principe de superposition va permettre d'additionner les différentes sections d'aciers obtenues.

### Bilan des efforts extérieurs et PFS :

- ❑ Problème 1 : voir les calculs détaillés sur « Droite de déformation  $e_{se} - B$  » à la page 25.
- ❑ Problème 2 :
  - $F_{st}$ ,  $F_{sc}$  et  $M$ .
  - $F_{sc} - F_{st} = 0$
  - $\sum M / \text{aciers tendus} = M - F_{sc}(d - d') = 0$  ou  $\sum M / \text{aciers comprimés} = M - F_{st}(d - d') = 0$

### Données :

- ❑  $d$ ,  $d'$ ,  $b$ ,  $h$  et  $x_{e_{se}-B}$  (donc  $Z_{e_{se}-B}$  aussi) connues
- ❑  $M_{e_{se}-B}$  et  $M_{ELU}$  connus

### Equations de dimensionnement :

- ❑ Problème 1 :  $A_{st1} \geq \frac{M_{e_{se}-B}}{f_{su}Z_{e_{se}-B}}$  (PFS)
  - ❑ Problème 2 :  $A_{st2} \geq \frac{M_{ELU} - M_{e_{se}-B}}{f_{su}(d - d')}$  et  $A_{sc} \geq \frac{M_{ELU} - M_{e_{se}-B}}{s_{sc}(d - d')}$  (PFS)
- ↪ Il vient alors :  $A_{st} \geq \frac{M_{e_{se}-B}}{f_{su}Z_{e_{se}-B}} + \frac{M_{ELU} - M_{e_{se}-B}}{f_{su}(d - d')}$  et  $A_{sc} \geq \frac{M_{ELU} - M_{e_{se}-B}}{s_{sc}(d - d')}$

La seule inconnue dans cette équation est  $s_{sc}$ , la contrainte dans les aciers comprimés.

Détermination de  $s_{sc}$  :

- $s_{sc} = E_s e_{sc}$  si on se situe dans le domaine élastique, c'est à dire que  $e_{sc} < e_{se} = \frac{f_e}{E_s g_s}$ .
- $s_{sc} = \frac{f_e}{g_s}$  si on se situe dans le domaine plastique, c'est à dire que  $e_{sc} \geq e_{se}$ .

On a  $\frac{e_{sc}}{d'} = \frac{3.5 \cdot 10^{-3} + e_{se}}{d}$  (Thalès)

↳ Il vient alors  $e_{sc} = d' \frac{3.5 \cdot 10^{-3} + e_{se}}{d} \rightarrow$  déduction de  $s_{sc}$

**5. Section en T sans (ou exceptionnellement avec) armatures comprimées**

Deux cas peuvent se présenter :

- - Cas 1 : Seule tout ou partie de la table de compression est comprimée (la nervure restant une zone tendue)
- - Cas 2 : En plus de la table, une partie de la nervure est comprimée.

L'évaluation de la situation s'effectue en calculant le moment de table ultime  $M_{Tu}$ .

Evaluation du moment de table  $M_{Tu}$

$M_{Tu}$  est le moment maximum que peut reprendre la section lorsque la totalité de la table (mais seulement la table) est comprimée.

Hypothèses :

- On suppose que toute la table et seulement la table de compression est comprimée.
- On suppose aussi que la répartition de contrainte est rectangulaire simplifiée.

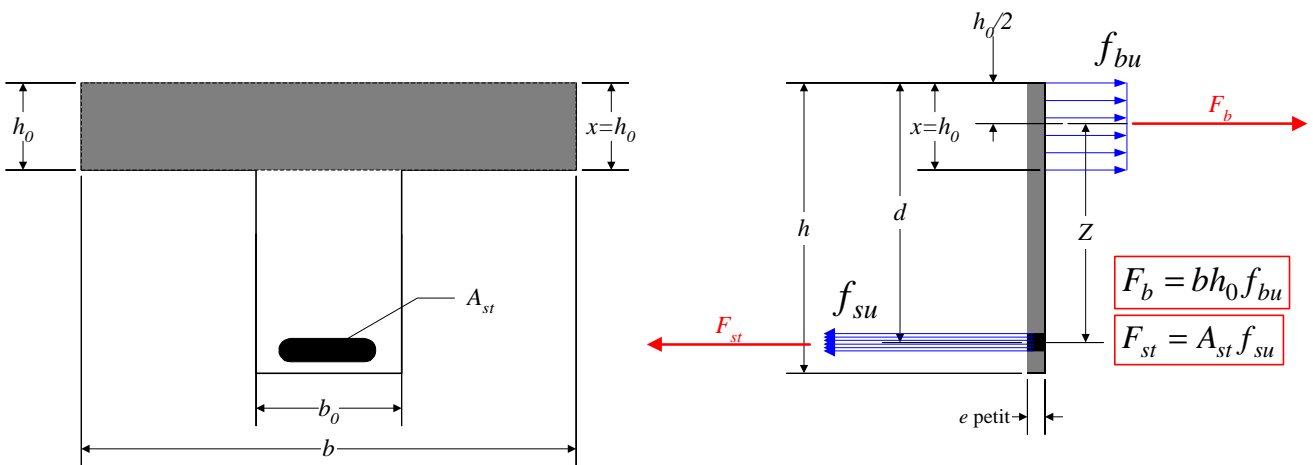


Figure X-3 - Diagramme des contraintes et bilan des résultantes induits par  $M_{TU}$

On a toujours  $\sum M / \text{aciers tendus} = M - F_b Z = 0$  avec  $Z = d - \frac{h_0}{2}$ .

↳ Il vient alors  $M_{Tu} = b h_0 f_{bu} \left( d - \frac{h_0}{2} \right)$

Condition à vérifier et conclusions :

- $M_{Tu} \geq M_{ELU} \rightarrow$  la table de compression est partiellement comprimée (l'axe neutre est dans la table)  $\rightarrow$  les calculs se ramènent à un cas classique de section purement rectangulaire.
- $M_{Tu} < M_{ELU} \rightarrow$  la table mais aussi une partie de la nervure est comprimée (l'axe neutre est dans la nervure)  $\rightarrow$  voir le paragraphe suivant.

Dimensionnement dans le cas  $M_{Tu} < M_{ELU}$  (une partie de la nervure est comprimée)

Le problème est décomposé en deux sous - problèmes précisés dans le graphique suivant :

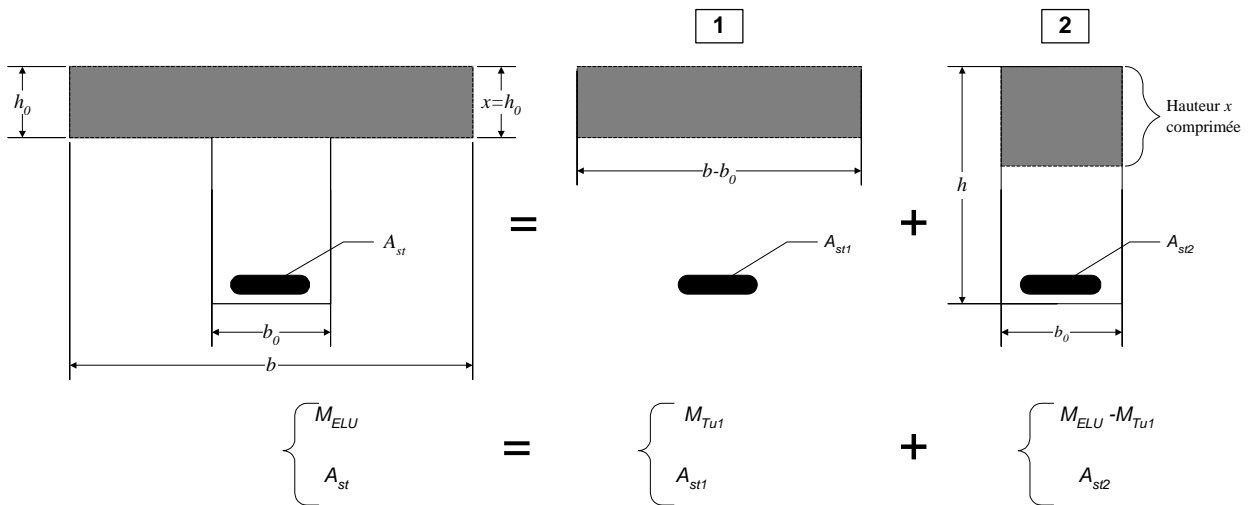


Figure X-4 – Décomposition des sections en T à l'ELU en dimensionnement avec aciers comprimés

Le principe de superposition va permettre d'additionner les différentes sections d'aciers obtenues avec :

- ❑ Problème 1 :  $M_{Tu1}$  est le moment équilibrant la table de compression retranchée de sa partie centrale de largeur  $b_0$ . Les conditions sont les mêmes que lors du calcul de  $M_{Tu}$ , il vient alors :  $M_{Tu1} = (b - b_0)h_0f_{bu} \left( d - \frac{h_0}{2} \right)$ .
- ❑ Problème 2 :  $M_{ELU} - M_{Tu1}$  est le moment résiduel repris par la nervure seule assimilable à une poutre de largeur  $b_0$ . Le calcul se conduit de la même manière que pour une section de poutre classique. Si  $M_{ELU} - M_{Tu1} > M_{rb}$ , il faudra rajouter des aciers comprimés. Mais cette éventualité doit être très rare puisque les sections en T sont souvent dimensionnées pour ne pas nécessiter d'armatures comprimées.

↳ Dimensionnement (Etat limite ultime de sollicitations) :  $A_{st} \geq A_{st1} + A_{st2}$

❑ Problème 1 :  $A_{st1} \geq \frac{M_{Tu1}}{f_{su} \left( d - \frac{h_0}{2} \right)}$

❑ Problème 2 : La section d'armature est de la forme (en l'absence d'aciers comprimés)  $A_{st2} \geq \frac{M_{ELU} - M_{Tu1}}{f_{su} Z_{ELU}}$   
 (voir le paragraphe Section rectangulaire sans armatures comprimées (cas  $m_{ELU} \leq m_{se-B}$ ), page 27).

**XI. Vérification des sections sous sollicitations tangentes – ELU**

Les contraintes tangentes  $t$  sont induites seulement par  $V$ . Elles sont classiquement présentes dans les poutres soumises à la flexion ( $M$  et  $V$  au moins présents). Les éléments de type poteaux et tirants ne reprennent aucun efforts tranchants !

## XI.1. Principe de justification de l'effort tranchant

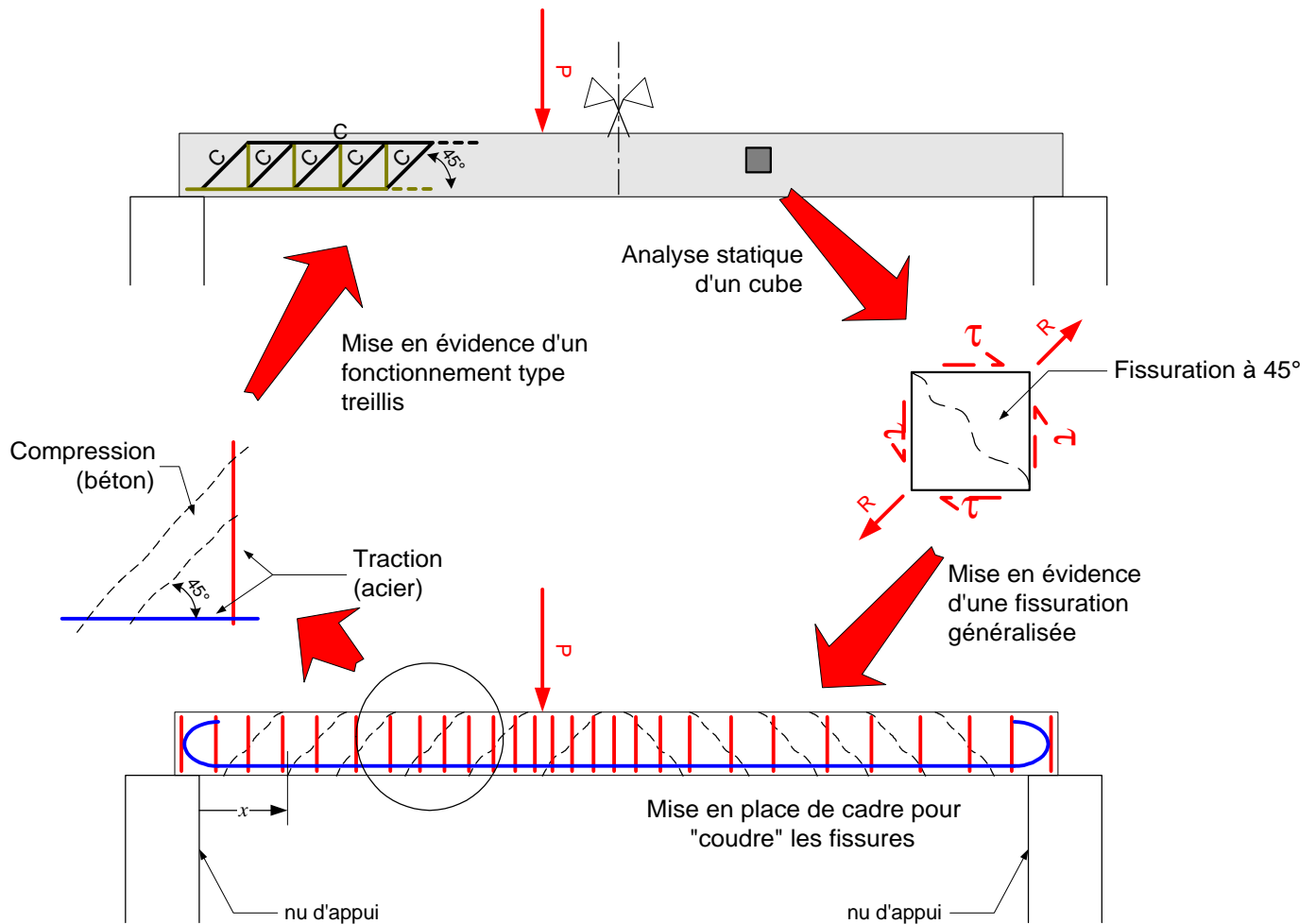


Figure XI-1 - Principe détaillé du fonctionnement d'une poutre sous sollicitation d'effort tranchant.

Les modes de rupture possibles par effort tranchant vont conduire à envisager les états limites principaux suivants :

1. Traction limite des armatures d'âmes ou armatures transversales
2. Compression limite des bielles de béton comprimées limitées par deux fissures à 45°
3. Traction limite des aciers longitudinaux existants.

Ces états limite pourraient se décliner à l'ELS et l'ELU mais compte tenu de l'aspect nettement prépondérant de l'ELU sur l'ELS, le règlement n'envisage que des calculs à l'ELU.

## XI.2. Hypothèses générales de calcul

### XI.2.a. Relation entre effort tranchant $V$ et contrainte tangentielle $t$

La contrainte tangente maximale (exprimée dans la section homogénéisée béton) d'une section rectangulaire de section  $b$  est de la forme<sup>14</sup>  $t(x) = \frac{V(x)}{bz}$  avec  $z$  le bras de levier entre les points d'application de la résultante béton et aciers tendus.  $x$  est compté du nu de l'appui gauche.

On pose généralement en première approximation  $z=0.9d$ , il vient alors  $t(x) = \frac{V(x)}{0.9bd}$ .

<sup>14</sup> Compte tenu de l'hétérogénéité introduite par le cas d'une section de béton armé, cette expression diffère de celle classiquement fournie par la résistance des matériaux construite pour le cas d'une section homogène. Rappel : la contrainte tangente maximum dans une section rectangulaire homogène est de la forme :  $t(x)_{\max} = \frac{3}{2} \frac{V}{bh} = \frac{V}{b \left( \frac{2}{3} h \right)}$ .

**XI.2.b. Contrainte conventionnelle de cisaillement [Art. A5.1,1]**

On définit réglementairement la contrainte conventionnelle de cisaillement :  $t_{ELU} = \frac{V_{ELU-\max}}{bd}$

avec  $V_{ELU-\max}$  la valeur maximale à l'ELU de l'effort tranchant.

Pour tenir compte de la transmission directe des charges aux appuis, la contrainte conventionnelle de cisaillement peut être calculée en réduisant la part des efforts appliqués sur la poutre. Il vient les règles suivantes :

- ❑ Entre le nu d'appui et  $\frac{h}{2}$  : charges négligées
- ❑ Entre  $\frac{h}{2}$  et  $\frac{3}{2}h$  : seul la fraction  $\frac{2}{3}x$  de la charge est conservée

**XI.3. Conditions imposées par l'ELU****XI.3.a. Etat limite ultime du béton de l'âme [Art. A5.1,21]**

Pour des cadres, étriers et épingles verticaux (armatures transversales verticales), la contrainte conventionnelle de cisaillement  $t_{ELU}$  doit vérifier :

- ❑ En fissuration peu préjudiciable :  $t_{ELU} \leq \min\left[\frac{0.2f_{c28}}{g_b}; 5 \text{ Mpa}\right]$
- ❑ En fissuration préjudiciable ou très préjudiciable :  $t_{ELU} \leq \min\left[\frac{0.15f_{c28}}{g_b}; 4 \text{ Mpa}\right]$

**XI.3.b. Section minimale d'armatures d'âme [Art. A5.1,22]**

Soit  $s_t$  l'espacement des cours successifs d'armatures transversales,  $\varnothing_t$  le diamètre de ces mêmes armatures transversales et enfin  $A_t$  la section d'un cours d'armatures transversales, on doit vérifier :

- ❑  $s_t \leq \min[0.9 \cdot d; 40 \text{ cm}]$
- ❑  $\varnothing_t \leq \min\left[\frac{h}{35}; \varnothing; \frac{b}{10}\right]$
- ❑  $\frac{A_t}{s_t} \geq 0.4 \cdot 10^6 \frac{b}{f_e}$

**XI.3.c. Etat limite ultime des armatures d'âmes [Art. A5.1,23]**

Seul sera traité par la suite le cas des armatures transversales verticales.



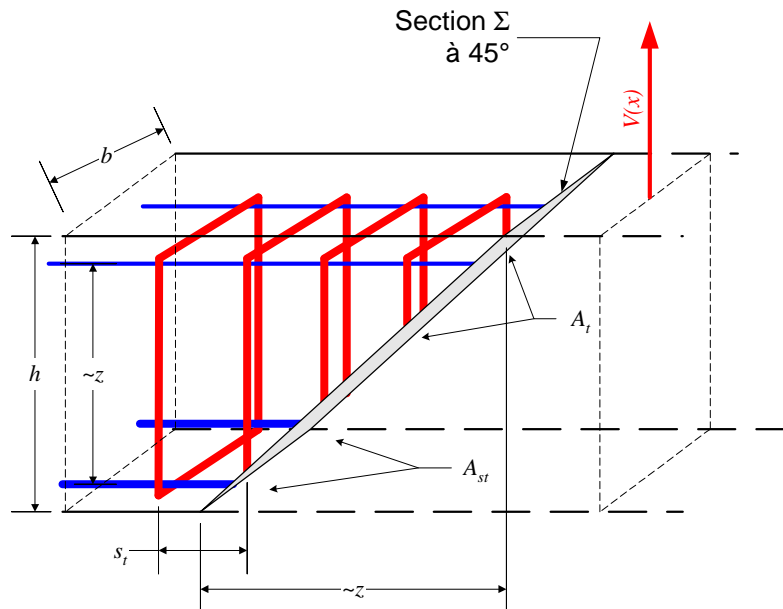


Figure XI-2 – Diagramme de la contrainte de cisaillement et résultante sur la section Σ (cadres verticaux)

Isolons le côté gauche de la poutre. Au droit de la section Σ à l'abscisse  $x$ , section à  $45^\circ$  représentative d'une fissure, est présent l'effort tranchant  $V(x)$ . En supposant que le béton – qui travaille en traction perpendiculairement à cette fissure – est négligé, seul les aciers transversaux peuvent reprendre l'effort tranchant  $V(x)$ .

La section totale d'armatures transversales coupant la section Σ est  $\frac{z}{s_t} A_t$ .

Quel que soit  $x$ ,  $A_t$  doit donc vérifier l'inégalité suivante :  $\frac{z}{s_t} A_t s_{st} \geq V(x)$

Le dimensionnement impose la recherche de la section « dangereuse » correspondant à l'effort tranchant maximal. En outre, les calculs s'effectuent à l'ELU, il vient donc  $V_{\max} = V_{ELU}$  et  $s_{st} = f_{su}$ .

Enfin en introduisant la contrainte conventionnelle de cisaillement, l'équation précédente devient :

$$\frac{z}{s_t} A_t f_{su} \geq V_{ELU} = t_{ELU} b d = t_{ELU} b \frac{z}{0.9} \text{ soit encore } \frac{A_t}{s_t} \geq \frac{t_{ELU}}{0.9} \frac{b}{f_{su}}$$

Mais l'expérience montre que le béton est capable de reprendre une part de cet effort de traction diminuant d'autant la contrainte devant être reprise par les armatures transversales.

Il vient alors l'équation modifiée :

$$\frac{A_t}{s_t} \geq \frac{(t_{ELU} - 0.3 f_{ij} \cdot k) b}{0.9 f_{su}}$$

où :

- $k=0$  si la fissuration est très préjudiciable ou s'il y a reprise de bétonnage
- $k=1$  en flexion simple

Pratiquement, on se fixe une section d'armatures transversales  $A_t$  et on fait varier l'espacement  $s_t$ .

Dans le cas d'une poutre sur deux appuis et uniformément chargée, on détermine  $A_t$  et le premier espacement  $s_t$  puis on applique la règle de Caquot en choisissant les espacements dans la série 7, 8, 10, 11, 13, 16, 20, 25, 35, 40 et en les reportant autant de fois qu'il y a de mètres dans la demi portée à partir de l'abscisse  $\frac{s_t}{2}$ .

### XI.3.d. Zones d'appui [Art. A5.1,3]

Au niveau des appuis, l'analyse du fonctionnement de type treillis conduit au bilan statique suivant :

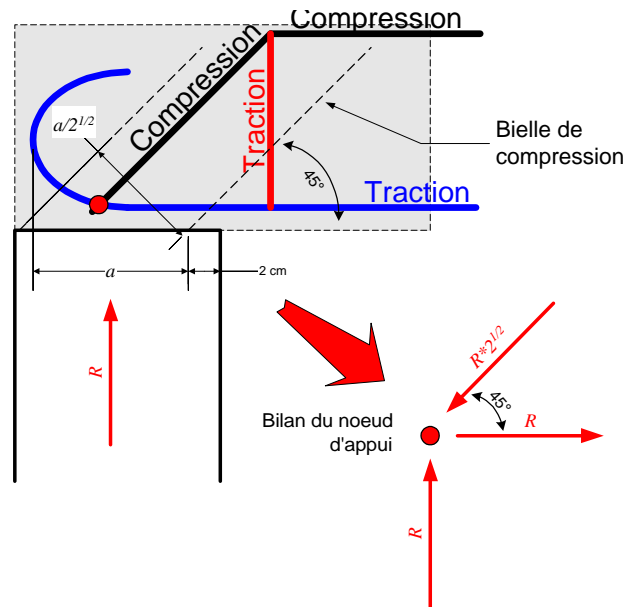


Figure XI-3 - Bilan du noeud d'appui d'un poutre BA

Bilan des efforts extérieurs et PFS :

- ❑ R : réaction d'appui connue (correspond à l'effort tranchant au droit de l'appui)
- ❑ 1 effort de traction dans les armatures longitudinales
- ❑ 1 effort de compression dans la bielle d'about

Application du PFS (solution graphique) :

- ❑ L'effort dans la bielle en compression est de  $R\sqrt{2}$
- ❑ L'effort dans les aciers longitudinaux est de R

Etat des contraintes (répartition homogène) :

❑ Bielle de béton comprimée :  $s_{bc} = \frac{R\sqrt{2}}{b \cdot \frac{a}{\sqrt{2}}} = \frac{2 \cdot R}{b \cdot a}$

avec a : longueur de la bielle comprimée (généralement égal à la longueur d'ancrage des aciers longitudinaux retranchée de 2 cm).

❑ Armatures longitudinales :  $s_{st} = \frac{R}{A_{st}}$

**1. Vérifications pour appuis simples**

Soit  $V_{ELU}$ , la valeur de la réaction d'appui.

On doit vérifier que la section d'armature longitudinale est suffisante (en posant  $s_{st} = f_{su}$ ) et que la compression dans la bielle de béton ne dépasse pas une valeur fixée.

Ces deux conditions sont résumées de la manière suivante :  $A_{st} \geq \frac{V_{ELU}}{f_{su}}$  et  $s_{bc} = \frac{2 \cdot V_{ELU}}{b \cdot a} \leq 0.8 \frac{f_{c28}}{g_b}$

**2. Vérification pour appuis intermédiaires**

Soit  $V_{ELU-gauche}$  et  $V_{ELU-droite}$ , les 2 valeurs d'effort tranchant (valeurs conventionnellement positives) à droite et à gauche de l'appui considéré et  $M_{ELU}$  (valeur théoriquement négative) la valeur du moment fléchissant sur appui.

Les mêmes conditions que précédemment sont à vérifier mais avec des équations prenant en compte l'influence positive du moment fléchissant :

❑ à gauche :  $A_{st-gauche} \geq \frac{V_{ELU-gauche} - \|M_{ELU}\| \cdot z}{f_{su}}$  et  $s_{bc} = \frac{2 \cdot V_{ELU-gauche}}{b \cdot a} \leq 0.8 \frac{f_{c28}}{g_b}$

## Béton Armé

$$\left| \begin{array}{l} \square \text{ à droite : } A_{st-droite} \geq \frac{V_{ELU-droite} - \|M_{ELU}\| \cdot z}{f_{su}} \text{ et } s_{bc} = \frac{2 \cdot V_{ELU-droite}}{b \cdot a} \leq 0.8 \frac{f_{c28}}{g_b} \end{array} \right.$$