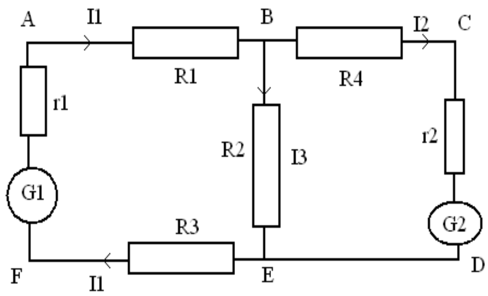
Chapitre II : **Réseaux linéaires en régime permanant**

I- Définitions des éléments d'un réseau linéaire

1- Réseau linéaire

Un réseau est l'association de plusieurs dipôles (actifs et /ou passifs) branchés entre eux par des fils de résistances pratiquement nulles. Un réseau est dit linéaire si toutes les relations entre les potentiels et les courants sont linéaires.

2- Nœud



Un nœud d'un réseau est une interconnexion où arrivent 3 fils ou plus (les points B et E sont des nœuds).

3- Branche

Une branche est une portion de circuit située entre deux nœuds consécutifs (elle est parcourue par le même courant), les dipôles la constituant sont donc en série. Les parties AB, BCDE, BE, EFA sont des branches dans le réseau de l'exemple ci-dessus.

4- Maille

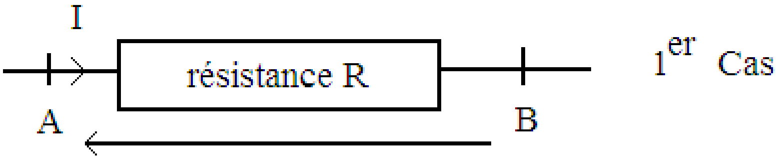
Une maille est une partie du réseau formée par un ensemble de branches formant un circuit **fermé** dans lequel un nœud n'est rencontré qu'une seule fois. ABEFA, ABCDEFA, BCDEB sont des mailles.

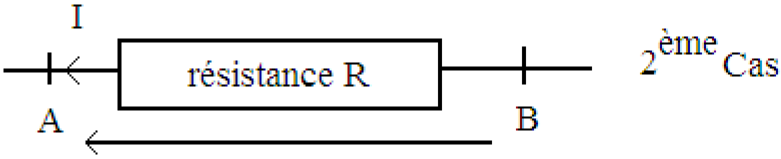
Sur le réseau précédent, nous avons trois branches EFAB, BE, BCDE, deux nœuds B et E et trois mailles ABEFA, BCDEB, ABCDEFA.

L'étude des réseaux consiste en la détermination des intensités des courants et des différences de potentiels dans les branches du réseau. Pour faire cette étude nous devons adopter des conventions de sens pour les courants et les mailles dans le réseau:

5- Résistance d'un conducteur

Un conducteur ohmique (ou résistance) est un conducteur aux bornes duquel la différence de potentiel est proportionnelle à l'intensité de courant qui le traverse. Sa caractéristique ($V_A - V_B = f(I)$) est une droite passant par l'origine. $V_A - V_B = RI$.





Pour le 1er cas, nous écrivons $V_A - V_B = + R\, I$, avec le sens choisi pour le courant la chute de potentiel représentée par une flèche allant vers les potentiels les plus élevés est égale à + R I

Pour le 2ème cas, nous avons $V_A - V_B = - R\, I$

6- <u>Générateurs en courant continu</u> :

Un générateur est un appareil capable de maintenir une différence de potentielle entre ses bornes. Il crée alors un courant permanent dans les conducteurs qui sont branchés entre ses bornes. Les bornes du générateur sont appelées pôles : la borne positive souvent notée pôle + est celle ayant le potentiel le plus élevé et la borne négative notée pôle – est l'autre borne.

a- Force électromotrice (f.e.m.) :

Un générateur est dit à vide si aucun circuit n'est branché entre ses bornes. Dans ce cas aucun courant ne circule. La force électromotrice du générateur notée e est la différence de potentiel aux bornes du générateur à vide , son unité est donc le Volt.

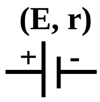
Si A et B sont les bornes du générateur, alors sa force électromotrice est $E = V_A - V_B$.

b- Résistance interne :

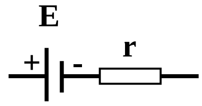
Un générateur est dit en charge si un circuit conducteur est branché entre ses bornes. Un courant permanent apparaît donc dans le circuit ainsi formé. En général, dans ce cas, la différence de potentiel aux bornes du générateur est inférieure à la f.e.m. E suggérant la présence d'une résistance à l'intérieur du générateur responsable de cette chute de potentiel. Cette résistance est appelée résistance interne du générateur et notée r.

$$V_A - V_B = E - rI$$

c – Représentation d'un générateur :



ou



Dans un générateur, le courant circule de la borne positive vers la borne négative à travers le circuit extérieur.

Un générateur est dit idéal si sa résistance interne est nulle (r = 0).

7- <u>Récepteurs en courant continu</u> :

Un récepteur est un circuit capable de transformer de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie : mécanique (moteurs), chimique (solution électrolyte)…

a- Force contre électromotrice (f.c.e.m.)

Les récepteurs ont besoin d'un générateur externe pour pouvoir fonctionner. Ils sont caractérisés par une force résistante au déplacement des porteurs de charges mobiles. C'est l'analogue de la force électromotrice dans le cas des générateurs et c'est pour cela qu'on l'appelle force contre électromotrice (f.c.e.m.) et qu'on note E'.

b- Résistance interne :

On définit de même une résistance interne pour les récepteurs qui rend compte de la force de frottement dans le récepteur. Un récepteur reçoit le courant électrique. Il entre donc par sa borne positive. Nous pouvons donc écrire :

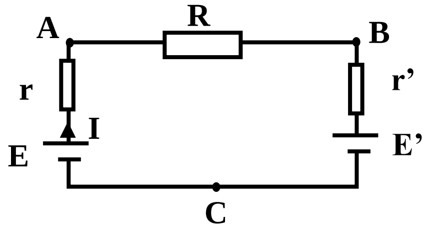
$$\mathbf{V_A - V_B = E' + r' I.}$$

<u>Conventions</u>:

Dans chaque branche d'un réseau nous choisissons un sens positif arbitraire pour l'intensité du courant. Si après calcul, on trouve une intensité négative, cela veut dire que le sens réel du courant est l'opposé de celui choisi.

II- <u>Lois régissant les circuits électriques</u> :

1 - <u>Loi d'Ohm généralisée (loi de Pouillet)</u> :



Soit un circuit constitué d'un générateur de f.e.m. E et de résistance interne r, d'un récepteur de f.c.e.m. E' et de résistance interne r' et d'une résistance R.

La d.d.p. aux bornes du générateur : $\mathbf{V_A - V_C = E - rI}$ et celle aux bornes du récepteur : $V_B - V_C = E' + r'I$. La d.d.p. aux bornes de la résistance R est donc : $V_A - \mathbf{V_B = V_A - V_C + V_C - V_B = E - rI - E' - r'I = E - E' - (r + r')I = RI}$

La loi d'Ohm généralisée s'écrit alors : $\mathbf{E - E' = (r + r' + R)I}$

ce qui donne : $$\mathbf{I = \frac{E - E'}{r + r' + R}}$$

Dans le cas général la loi d'Ohm généralisée s'écrit : $$\mathbf{I = \frac{\sum_i E_i - \sum_j E'_j}{\sum_k R_k}}$$

Cette loi est appelée aussi loi de Pouillet.

2 - <u>Lois de conservation dans un circuit : lois de Kirchhoff</u> :

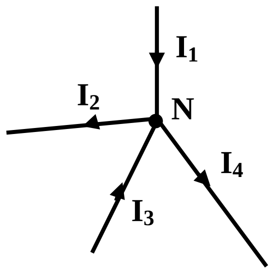
Les lois de l'électrocinétique, connues sous le nom de lois de Kirchhoff, sont en fait de simples lois de conservation.

a. <u>Conservation du courant : loi des nœuds</u> :

En régime permanent dans un réseau, la conservation de la charge électrique se traduit par la conservation du courant : en aucun point du circuit il ne peut y avoir d'accumulation (ou perte) de charge. Ceci nous permet d'énoncer la loi des nœuds comme suit : La somme algébrique des courants entrants d'un nœud et des courants sortant du nœud est nulle : $\mathbf{\sum I_{entrant} - \sum I_{sortant} = 0}$

Cette loi est appelée la première loi de Kirchhoff ou loi des nœuds

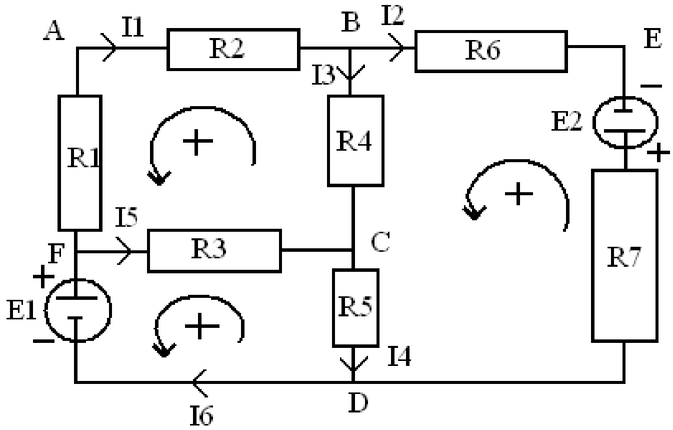
<u>Exemple</u> : Au nœud N de la figure ci contre, les courants I_1 et I_3 sont considérés entrants et les courants I_2 et I_4 sont considérés sortants.



$\mathbf{I_1 + I_3 = I_2 + I_4}$

b. <u>Conservation de l'énergie : loi des mailles</u> :

Soit le réseau ci-dessous :



E_1, E_2 sont les f.e.ms du réseau et R les résistances. Si nous considérons la maille ABCFA, nous pouvons écrire $(V_A - V_B) + (V_B - V_C) + (V_C - V_F) + (V_F - V_A) = 0$

Loi des mailles : Le long d'une maille d'un réseau, la somme des différences de potentiel aux bornes des branches formant cette maille est nulle. Cette loi est aussi connue sous le nom de $2^{ème}$ loi de Kirchhoff.

Remarque 1 :

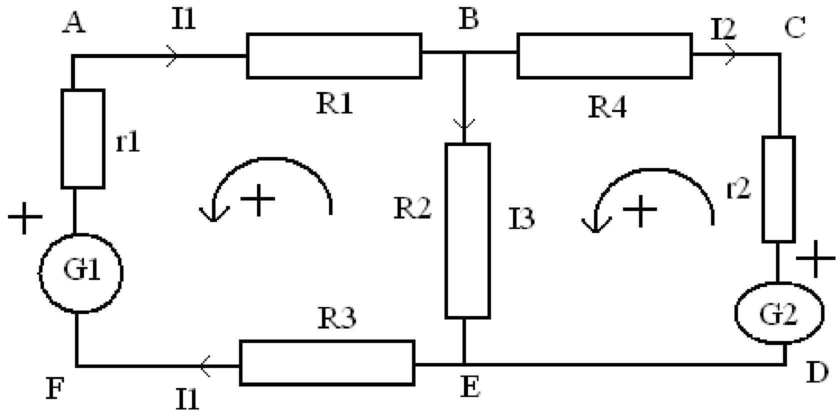
Soit un réseau à b branches et n noeuds, l'étude du réseau nécessite donc la détermination de b intensités. Or, n nœuds nous fournissent n – 1 équations indépendantes. Dans le réseau nous aurons donc m = (b - n + 1) mailles indépendantes i.e., fournissant des équations indépendantes

Remarque 2 :

Comme précisé auparavant, l'étude d'un réseau consiste en la détermination des intensités des courants dans les différentes branches du réseau. Cette étude peut aussi chercher à déterminer les différences de potentiels aux bornes de ces branches. Donc les inconnues sont soit les b courants dans les différentes branches ,soit les b différences de potentiels à leurs bornes.

c. Exemple d'application :

Déterminer les intensités des courants dans le réseau ci-dessous en utilisant la loi des mailles et la loi des nœuds. G_1 et G_2 sont les f.e.m des générateurs et r_1, r_2 leurs résistances internes.



Nous avons 3 branches, donc 3 inconnues à déterminer qui sont soit les intensités dans les 3 branches, soit les tensions à leurs bornes. Nous avons choisi un sens de parcours arbitraire pour les mailles et un sens pour les courants. Dans ce réseau, nous avons 3 branches, 2 nœuds, et 3 mailles. Les 2 nœuds nous donnent 1 équation indépendante. Nous aurons donc (3 -3 + 1= 2) mailles indépendantes.

Dans la maille ABEFA, nous pouvons écrire :

$(V_A – V_B) + (V_B – V_E) + (V_E – V_F) + (V_F – V_A) = R_1 I_1 + R_2 I_3 + R_3 I_1 - G_1 + r_1 I_1 = 0$

Dans la maille BCDEB :

$(V_B - V_C) + (V_C - V_D) + (V_D - V_B) = R_4 I_2 + r_2 I_2 + G_2 - R_2 I_3 = 0$

Loi des nœuds: nous avons deux noeuds B et E

en B : $I_1 = I_2 + I_3$, en E : $I_3 + I_2 = I_1$ donc une seule équation indépendante En ajoutant les deux équations indépendantes des mailles, nous obtenons un système de 3 équations à 3 inconnues :

$$\begin{cases} (R1+R3+r1)\,I1+R2\,I3=G1 \\ (R4+r2)\,I2+R2\;I3 = -G2 \\ I1-I2-I3 = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système par la méthode du déterminant nous donne

$$I1=\frac{\Delta I1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} G1 & 0 & R2 \\ -G2 & R4+r2 & R2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R1+R3+r1 & 0 & R2 \\ 0 & R4+r2 & R2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{G1(-R4-r2+R2)+R2G2}{(R1+R3+r1)(R2-R4-r2)-R2\,(R4+r2)}$$

$$I2=\frac{\Delta I2}{\Delta}\;et\;\; I3=\frac{\Delta I3}{\Delta}$$

3 - Théorème de superposition en régime permanant

a -Enoncé

Soit un réseau où les résistances des branches sont données avec les différents générateurs caractérisés par leur f.e.m E_i et leur résistance interne r_i :

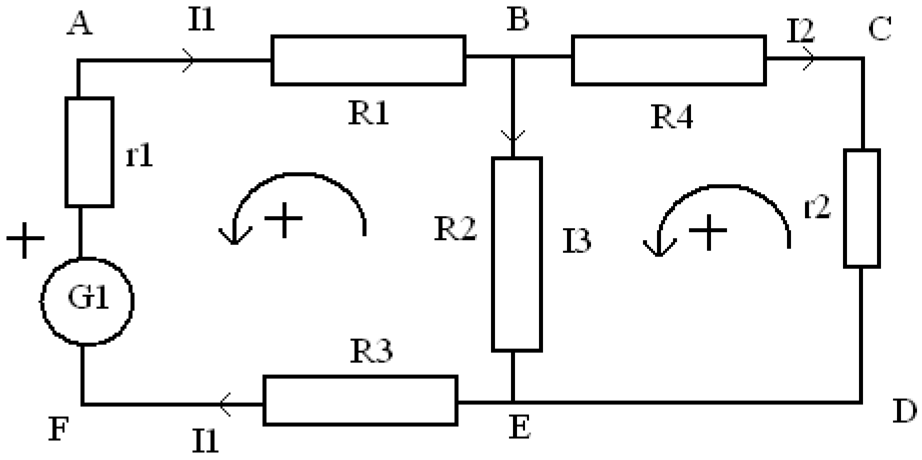
Théorème de superposition : l' intensité totale du courant dans une branche de ce réseau est égale à la somme algébrique des intensités des courants créés par chacun des générateurs dans cette branche, les autres générateurs étant remplacés par leur résistance interne r_i.

b - Exemple d'application :

Pour appliquer le théorème de superposition et calculer les intensités des courants ou les d.d.p dans les branches d'un réseau donnés par plusieurs générateurs, nous commençons par remplacer les différents générateurs par leur résistance interne sauf un générateur que nous gardons dans le réseau. Puis, nous calculons l'intensité dans les branches. Nous recommençons cette opération en gardant à chaque fois un des générateurs et en remplaçant les autres par leur résistance interne. Enfin, nous faisons la somme des différentes valeurs trouvées avec chaque générateur en absence des autres.

Si nous reprenons l'exemple traité ci-dessus nous procédons en deux étapes

1 – 1ère étape on enlève le générateur G_2 et on le remplace par sa résistance interne r_2 puis on calcule les intensités dans les branches. Soit le schéma suivant



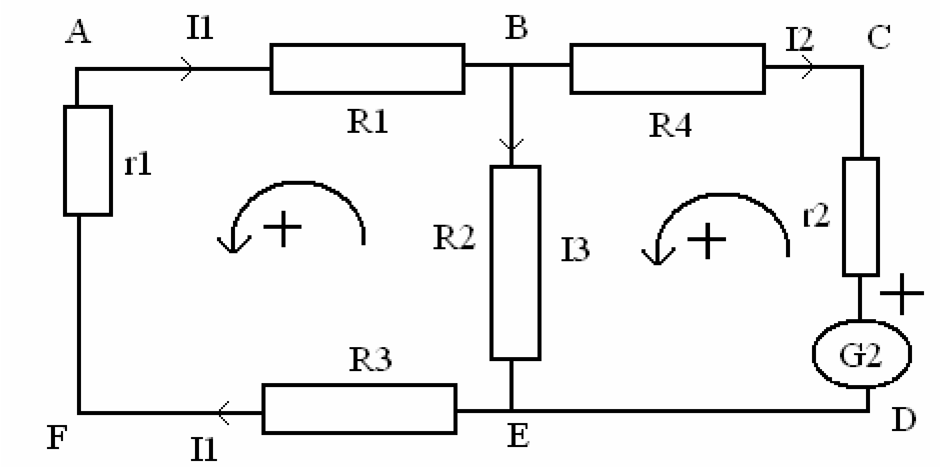
En utilisant les résultats précédents, nous avons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (R1+R3+r1)\,I11+R2\,I31=G1 \\ (R4+r2)\,I21+R2\;I31 = 0 \\ I11-I21-I31 = 0 \end{cases}$$ En résolvant ce système

$$I11=\frac{\Delta I11}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} G1 & 0 & R2 \\ 0 & R4+r2 & R2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R1+R3+r1 & 0 & R2 \\ 0 & R4+r2 & R2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{G1(-R4-r2+R2)}{(R1+R3+r1)(R2-R4-r2)-R2(R4+r2)}$$

$$I21=\frac{\Delta I21}{\Delta}\; et\;\; I31=\frac{\Delta I31}{\Delta}$$

2 – 2ème étape : On enlève le générateur E_1 et on le remplace par sa résistance interne r_1, puis on calcule les intensités dans les différentes branches. Nous obtenons alors le schéma suivant



En utilisant les résultats précédents, nous avons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} (R1+R3+r1)\,I12 + R2\,I32 = 0 \\ (R4+r2)\,I22 + R2\;I32 = -G2 \\ I12 - I22 - I32 = 0 \end{cases}$$ En résolvant ce système

$$I12 = \frac{\Delta I12}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & R2 \\ -G2 & R4+r2 & R2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R1+R3+r1 & 0 & R2 \\ 0 & R4+r2 & R2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{R2\;G2}{(R1+R3+r1)(R2-R4-r2)-R2\,(R4+r2)}$$

$$I22 = \frac{\Delta I22}{\Delta}\; et \;\; I32 = \frac{\Delta I32}{\Delta}$$

Enfin pour conclure on peut facilement voir que le courant résultant de la présence des deux générateurs est égal à la somme des courants fourni par chaque générateur I1 = I11 + I12

4 - <u>Théorème de Thevenin</u>

1. Enoncé:

Une partie d'un réseau contenant des éléments actifs est équivalente à un générateur de tension de f.e.m. la différence de potentiel entre les bornes considérées et de résistance interne la résistance équivalente vue entre ces bornes quand les générateurs et les récepteurs sont remplacés par leurs résistances internes.

2. Méthode d'application

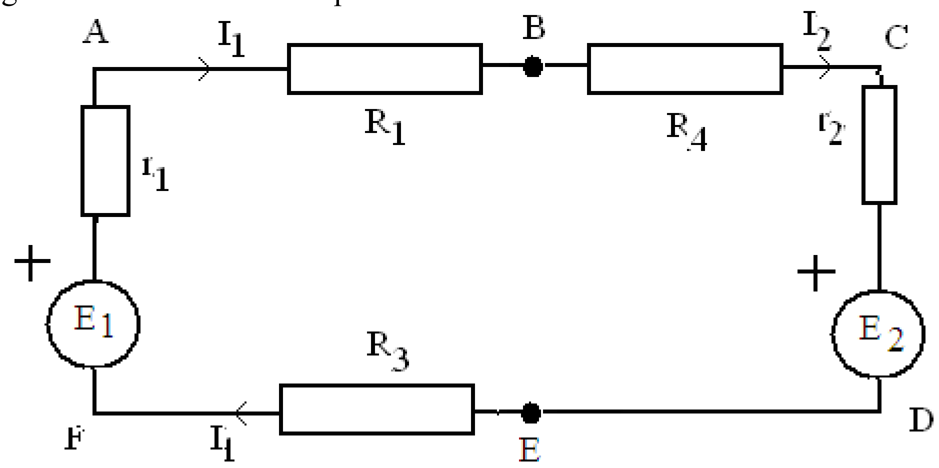
Lorsqu'on cherche le courant dans une branche d'un circuit donné par application du théorème de Thevenin, on procède comme suit : On enlève la branche en question et on remplace la partie du circuit qui reste par son générateur de Thévenin équivalent.

Ensuite, on remet la branche enlevée aux bornes du générateur obtenu. Le courant cherché est obtenu par simple application de la loi de Pouillet.

3. Exemple

Reprenons l'exemple traité ci-dessus, pour calculer le courant dans la branche BE. On procède en deux étapes :

<u>1ère étape</u> : on enlève la branche BE et on calcule la d.d.p $V_B - V_E$ qui correspond à la f.e.m. du générateur de Thevenin équivalent. D'où le schéma suivant :



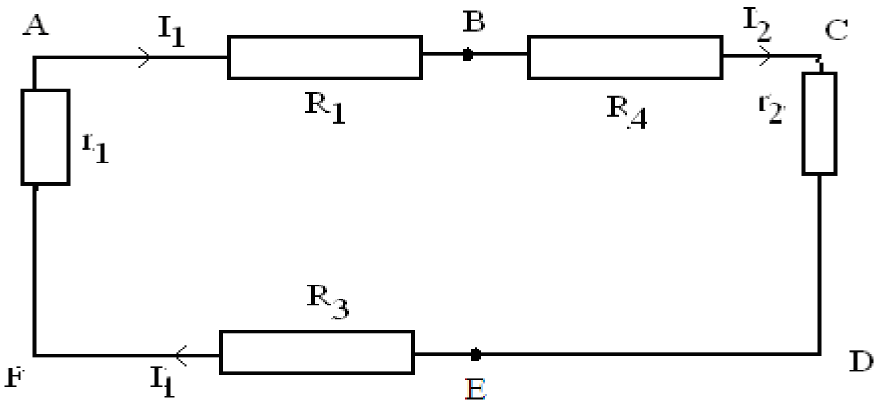
D'après la loi de Pouillet $\mathbf{I = \dfrac{E_1 - E_2}{R_1 + R_4 + R_3 + r_1 + r_2}}$

donc, $\mathbf{V_B - V_E = -(R_1 + r_1 + R_3)\, I + E_1}$

et

$$\mathbf{E_{Th} = -(R_1 + r_1 + R_3)\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_4 + R_3 + r_1 + r_2} + E_1 = \frac{(R_4 + r_2)E_1 + (R_1 + r_1 + R_3)E_2}{R_1 + R_4 + R_3 + r_1 + r_2}}$$

<u>2ème étape</u> : on enlève les générateurs E_1 et E_2 et on ne laisse que leurs résistances internes r_1 et r_2 puis, on calcule la résistance équivalente vue entre les points B et E, on obtient alors le schéma suivant :

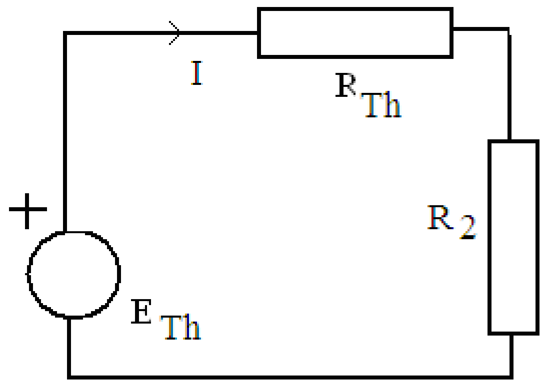


Entre B et E, les résistances ($R_1 + r_1 + R_3$) et ($R_4 + r_2$) sont associées en parallèle. Donc,

$$\frac{1}{R_{Th}}=\frac{1}{R_1+r_1+R_3}+\frac{1}{R_4+r_2}$$

$$R_{Th}=\frac{(R_4+r_2)(R_1+r_1+R_3)}{R_1+R_4+R_3+r_1+r_2}$$

Si on remplace le circuit entre B et E par le générateur de Thevenin équivalent puis on remet la branche BE entre B, on obtient le schéma équivalent suivant :



Le courant I_2 dans la branche BE (R_2) est donc :

$$I_3=\frac{E_{Th}}{R_2+R_{Th}}=\frac{\dfrac{(R_4+r_2)E_1+(R_1+r_1+R_3)E_2}{R_1+R_4+R_3+r_1+r_2}}{R_2+\dfrac{(R_4+r_2)(R_1+r_1+R_3)}{R_1+R_4+R_3+r_1+r_2}}$$

$$I_3=\frac{(R_4+r_2)E_1+(R_1+r_1+R_3)E_2}{(R_1+r_1+R_3)(R_4+r_2+R_2)+R_2(R_4+r_2)}$$

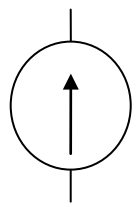
Cette expression du courant $\mathbf{I_3}$ est bien la même que les deux expressions trouvées par application des lois de Kirchhoff et du théorème de supperposition vus plus haut.

5 Théorème de Norton

Avant d'énoncer le théorème de Norton, définissons d'abord un générateur de courant :

Définition : Générateur de courant

Un générateur de courant ou source de courant est un dispositif capable de débiter un courant constant entre ses bornes, il a une résistance interne (en général de très grande valeur) monté en parallèle. Son symbole est :



1- Théorème de Norton : énoncé :

Pour une branche d'un réseau, le reste du réseau (actif) est équivalent à une source de courant idéale I, en parallèle avec une simple résistance R.

2- Méthode d'application

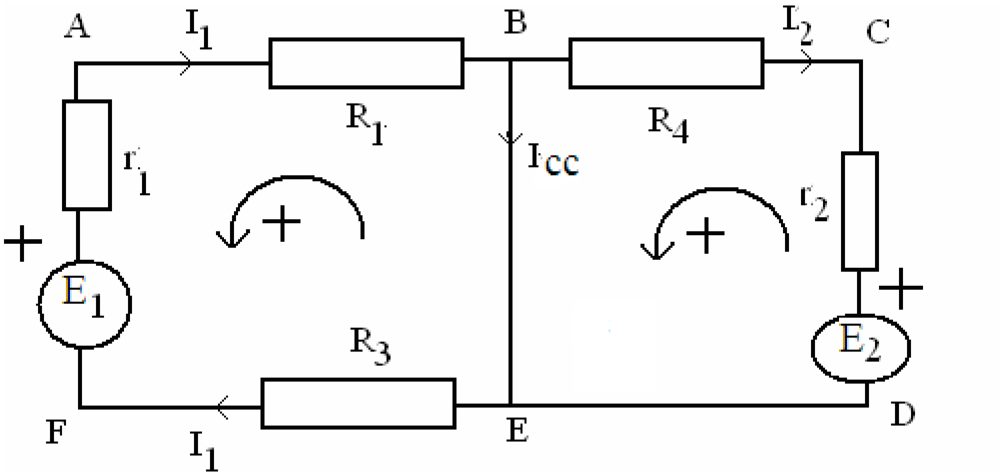
On procède en deux étapes :

1ère étape : le courant de Norton est celui traversant la branche lorsqu'elle est court-circuitée donc I_N = I court circuit

2ème étape : la résistance de Norton est la résistance vue entre les bornes de la branche quand on court-circuite les générateurs de tensions et les sources de courant. Cette résistance est la même que la résistance de Thevenin.

3- Exemple

Reprenons l'exemple traité jusqu'à maintenant avec les autres méthodes pour le traiter par la méthode de Norton : On commence par court-circuiter la branche BE en la remplaçant par un fil de résistance nulle, puis on calcule le courant dans cette branche



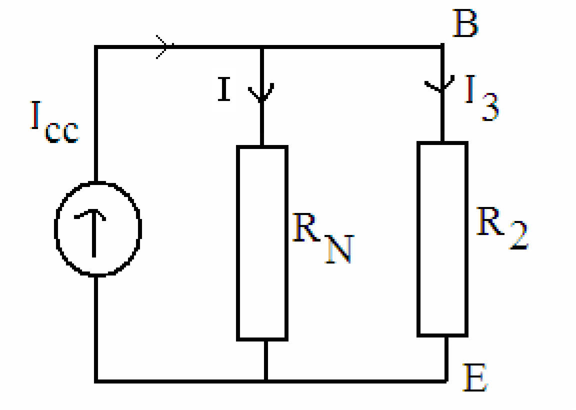
On en déduit le courant de court-circuit donné par (on annule la résistance R_2 dans l'expression obtenue auparavant):

$$\mathbf{I_{cc} = \frac{(R_4 + r_2)E_1 + (R_1 + r_1 + R_3)E_2}{(R_4 + r_2)(R_1 + r_1 + R_3)}}$$

Pour la deuxième étape, on procède comme pour la résistance de Thevenin, on obtient alors

$$\mathbf{R_N = \frac{(R_4 + r_2)(R_1 + r_1 + R_3)}{R_1 + R_4 + R_3 + r_1 + r_2}}$$

D'où le schéma résultant avec le générateur de Norton équivalent

donné 

Finalement le courant $\mathbf{I_3}$ est par

$$\begin{cases} \mathbf{R_N\, I = R_2\, I_3} \\ \mathbf{I + I_3 = I_{cc}} \end{cases} \mathbf{et\,donc}\ \mathbf{R_N (I_{cc} - I_3) = R_2\, I_3} \quad \Rightarrow \mathbf{I_3 = \frac{R_N I_{cc}}{R_2 + R_N}}$$

D'où $\mathbf{I_3 = \dfrac{(R_4 + r_2)E_1 + (R_1 + r_1 + R_3)E_2}{(R_4 + r_2)(R_1 + r_1 + R_3) + R_2 (R_1 + R_4 + R_3 + r_1 + r_2)}}$

Cette expression peut être comparée comme étant exactement la même que celles trouvées auparavant pour le courant I_3 dans la branche BE.

2- Energie dépensée dans une résistance

Si nous considérons une charge dq se déplaçant dans une résistance soumise à une d.d.p VA – VB (avec VA > VB) constante. L'énergie dépensée dans la résistance lorsque cette charge passe de A vers B est: dW = dq (VA – VB). En régime permanent, le courant est constant, donc pendant le temps dt, l'énergie dissipée est dW = I dt (VA – VB). Pendant un intervalle de temps T l'énergie dissipée est donnée par :

W = I (VA – VB) T = R I2 T =

La puissance dissipée dans R est donnée par :

La dissipation de cette puissance apparaît sous forme thermique: une résistance parcourue par un courant se chauffe, c'est l'effet Joule.

3- Applications de l’effet Joule

Parmi les applications de l’effet Joule, l’utilisation des résistances pour :

- le chauffage domestique : les radiateurs électriques à rayonnement
- les fours électriques domestiques et industriels
- l’éclairage à incandescence (filament chauffé devenant lumineux)
- Les fusibles de protection qui chauffent et coupent le circuit s’il y a dépassement de valeurs critiques pour le circuit…

5 - Aspect énergétique : Puissances :

Dans un générateur, la tension à ses bornes VA – VB et le courant I qu’il fournit dans un circuit sont reliés par la relation

$VA – VB = E – r I$,

E est la f.e.m et r la résistance interne, la puissance dans le générateur est donnée par :

$P = (VA – VB) I = (E – r I) I = E I – r I2$

P est la puissance fournie par le générateur au circuit extérieur, E I représente la puissance totale fournie par le générateur, elle correspond au travail du champ électromoteur fourni aux porteurs de charges mobiles lorsqu’ils traversent le générateur.

r I2 représente la puissance consommée à l’intérieur du générateur sous forme de chaleur par effet Joule, par la résistance interne r du générateur. Cette puissance correspond au travail de la force de frottement opposée aux porteurs de charges lorsqu’ils traversent le générateur.

3 - Aspect énergétique :

Aux bornes d'un récepteur, la tension et l'intensité sont liées par la relation :

$VA – VB = E' + r'. I$

Où: E' est la f.c.é.m. du récepteur et r' sa résistance interne; d'où l'expression de la puissance:

$P = (VA – VB)I = (E' + r' . I). I = E'. I + r'. I^2$

(VA – VB.) I représente la puissance totale reçue par le récepteur.

r'. I^2 représente la puissance dissipée par effet Joule dans le récepteur ; elle correspond au travail résistant des forces de frottement, qui se traduit par une diminution de l'énergie des porteurs mobiles de charge lorsqu’ils traversent le récepteur.

E'.I représente la puissance utile fournie au récepteur par l'extérieur; elle correspond au travail résistant fourni par le champ électromoteur, qui traduit la transformation de l'énergie électrique en une autre forme d'énergie (mécanique, chimique,..).
Si le récepteur actif fonctionne en générateur, on peut voir sa puissance comme celle d'un générateur vue ci dessus.