Rappels et Compléments Mathématiques

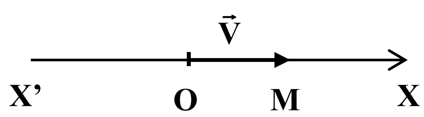
I – Calcul vectoriel :

Les grandeurs physiques sont de nature scalaire ou vectorielle. La masse, le temps, la longueur etc… sont des grandeurs scalaires. La vitesse, l'accélération, la force, le champ etc… sont des grandeurs vectorielles (ces grandeurs sont désignées par un vecteur).

- Un vecteur est caractérisé par sa direction, son sens et son module.

Exemple :

la direction du vecteur $\vec{\mathbf{V}}$ est l'axe X'X, son sens est de O vers M et son module est la distance OM.



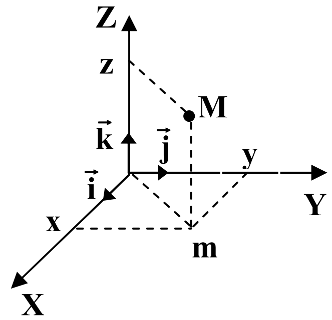
Remarque : On utilise souvent le mot « norme » pour désigner le module d'un vecteur. $\|\vec{\mathbf{V}}\|$: norme du vecteur $\vec{\mathbf{V}}$.

- Deux vecteurs sont égaux, s'ils ont la même direction, le même sens et le même module.
- Un vecteur est dit unitaire si sa norme (son module) est égale à l'unité.

Exemple : $\|\vec{\mathbf{i}}\| = \|\vec{\mathbf{j}}\| = \|\vec{\mathbf{k}}\| = \mathbf{1}$.

Représentation d 'un vecteur :

Dans un espace à trois dimension, muni d'un repère orthonormé direct auquel on associe une base $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$. Tout vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ est parfaitement défini par ses composantes **x, y** et **z** suivant les directions $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ et $\vec{\mathbf{k}}$.



* $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \mathbf{x}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z}\vec{\mathbf{k}}$

- Représentation matricielle : $\overrightarrow{\mathbf{OM}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$

- La norme du vecteur $\overrightarrow{\mathbf{OM}}$ est telle que :

  $\mathbf{OM^2 = Om^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2}$

  où m est la projection du point M dans le plan XOY d'où : $$\left\|\overrightarrow{\mathbf{OM}}\right\| = \sqrt{\mathbf{x}^2 + \mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2}$$

<u>Opération usuelles sur les vecteurs</u>

Soit $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$ une base orthonormé directe associée à un repère R (X,Y, Z) de l'espace dans laquelle on exprime les vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ par :

$$\vec{\mathbf{A}} = \mathbf{x_A}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y_A}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z_A}\vec{\mathbf{k}}$$
$$\vec{\mathbf{B}} = \mathbf{x_B}\vec{\mathbf{i}} + \mathbf{y_B}\vec{\mathbf{j}} + \mathbf{z_B}\vec{\mathbf{k}}$$

1 - <u>Addition</u> :

On définit la somme des deux vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ par un vecteur $\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{B}}$ tel que $\vec{\mathbf{C}} = (\mathbf{x_A} + \mathbf{x_B})\vec{\mathbf{i}} + (\mathbf{y_A} + \mathbf{y_B})\vec{\mathbf{j}} + (\mathbf{z_A} + \mathbf{z_B})\vec{\mathbf{k}}$

Le procédé peut être étendu à la somme de plus de deux vecteurs.

Le vecteur $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}}$ est défini comme la somme de $\vec{\mathbf{A}}$ avec l'opposé de $\vec{\mathbf{B}}$: $\vec{\mathbf{A}} - \vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{A}} + (-\vec{\mathbf{B}})$

2 -<u>Le produit d'un vecteur par un scalaire</u> :

Le produit d'un vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ par un scalaire **m** est un vecteur $\vec{\mathbf{C}}$, parallèle à $\vec{\mathbf{A}}$, de même sens si m>0 et de sens contraire si m<0. La norme de $\vec{\mathbf{C}}$ est : $\left\|\vec{\mathbf{C}}\right\| = |\mathbf{m}|\left\|\vec{\mathbf{A}}\right\|$

3 - <u>Produit scalaire de deux vecteurs</u>

On appelle <u>produit scalaire</u> de deux vecteurs le <u>nombre</u> :

$$\vec{\mathbf{A}}.\vec{\mathbf{B}} = \left\|\vec{\mathbf{A}}\right\|.\left\|\vec{\mathbf{B}}\right\|.\mathbf{\cos\theta}$$

où θ est l'angle formé par les directions des vecteurs $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$. θ est compris entre 0 et π.

Le produit scalaire de deux vecteurs est un scalaire (réel) positif ou négatif selon la valeur de l'angle θ.

En utilisant les composantes cartésiennes des vecteurs, le produit scalaire prend la forme : $\vec{A}.\vec{B} = x_A x_B + y_A y_B + z_A z_B$

Pour le produit scalaire, les propriétés suivantes sont valables :
* $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ (propriété commutative)

* $\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\vec{B} + \vec{A}\vec{C}$ (propriété distributive)

Remarque : Si les deux vecteurs sont perpendiculaires entre eux, le produit scalaire est nul.

4 - Produit Vectoriel

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs le vecteur :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \|\vec{A}\| . \|\vec{B}\| .\sin(\theta)\ \vec{u}$$

où θ est l'angle formé par les directions des vecteurs $\vec{A}$ et. $\vec{B}$ et $\vec{u}$ est un vecteur perpendiculaire au plan de $\vec{A}$ et $\vec{B}$ de façon que, $\vec{A}, \vec{B}, \vec{u}$ forment un système orienté.

Le module de ce produit est égal à l'aire du parallélogramme de côtés $\vec{A}$ et. $\vec{B}$.

En utilisant les composantes cartésiennes des vecteurs, le produit vectoriel peut s'écrire sous forme d'un déterminant:

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ x_B & y_B & z_B \end{vmatrix} = (y_A z_B - y_B z_A)\vec{i} + (x_A z_B - x_B z_A)\vec{j} + (x_A y_B - x_B y_A)\vec{k}$$

Pour le produit vectoriel, les propriétés suivantes sont valables :
* $\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$ (anticommutatif)

* Il n'est pas associatif, en générale on a : $(\vec{A} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{C} \neq \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$

Remarque : Le produit vectoriel d'un vecteur par lui même ou de deux vecteurs parallèles est nul ($\vec{A} \wedge \vec{A} = \vec{0}, \quad \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0} \quad \text{si} \quad \vec{A} // \vec{B}$)

5 - Double produit vectoriel

Le double produit vectoriel est un vecteur que l'on calcule de la manière suivante :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\,\vec{w}$$

6 – <u>Produit mixte</u> :

On appelle <u>produit mixte</u> le <u>nombre</u> : $\mathbf{m} = (\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}}).\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{C}}.(\vec{\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{B}})$

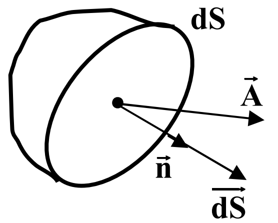
Ce produit est égal au volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs et noté souvent $(\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{C}})$. La permutation circulaire ne change pas la valeur du produit mixte :

$$(\vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{C}}) = (\vec{\mathbf{C}}, \vec{\mathbf{A}}, \vec{\mathbf{B}}) = (\vec{\mathbf{B}}, \vec{\mathbf{C}}, \vec{\mathbf{A}})$$

7- <u>Flux d'un vecteur</u> :

a -<u>A travers un élément de surface</u> dS :

Soit $\vec{\mathbf{A}}$ un champ de vecteur et **dS** un élément de surface orientée, $\overrightarrow{\mathbf{dS}} = \mathbf{dS}.\vec{\mathbf{n}}$

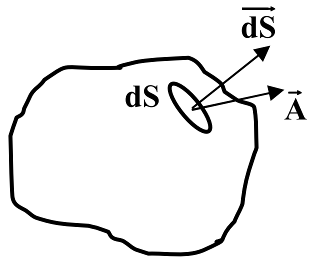


Par définition le flux élémentaire **dΦ** à travers l'élément de surface **dS** est :

$$\mathbf{d\Phi} = \vec{\mathbf{A}}.\mathbf{dS}.\vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{A}}.\overrightarrow{\mathbf{dS}}$$

b - <u>A travers une surface fermée</u> :

Soit une surface fermée **Σ**, le flux total à travers cette surface est :



$$\mathbf{\Phi} = \iint_{\Sigma} \vec{\mathbf{A}}.\overrightarrow{\mathbf{dS}}$$

Cette intégrale est souvent simplifiée par la connaissance de la géométrie de la surface fermée **Σ**.

Remarque : Par convention, le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{n}}$, normal à la surface **dS,** est orienté vers l'extérieur.

II – <u>Les opérateurs différentielles</u> :

Pour décrire un champ dans l'espace, on est amené à décrire ses variations. Nous allons définir plusieurs opérateurs différentiels destinés à décrire les variations spatiales d'un champ scalaire ou vectoriel.

1 – <u>Le gradient</u> :

Le gradient est un opérateur vectoriel qui agit sur une fonction scalaire f(x,y,z) (fonction des trois variables cartésiennes **x**, **y** et **z**.). On le note $\overrightarrow{\mathbf{grad}}$ et sa prononciation est : gradient de la fonction **f** au point M(x, y, z).

Le gradient est un vecteur dont le produit scalaire par le vecteur déplacement élémentaire $\mathbf{d\overrightarrow{OM}}$ ($\mathbf{d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}}$) est la différentielle de la fonction scalaire f(x,y,z) :

$$\mathbf{df = \overrightarrow{grad} f(x,y,z).d\overrightarrow{OM}}$$

En coordonnées cartésiennes (x,y,z), le gradient de la fonction f est :

$$\mathbf{\overrightarrow{grad} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}}$$

En coordonnées cylindriques (r, φ, z) :

$$\mathbf{\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z}$$

En coordonnées sphériques (r, θ, φ):

$$\mathbf{\overrightarrow{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi}$$

Interprétation physique :

- Le gradient caractérise le caractère non uniforme d'un champ scalaire, c'est à dire ses variations spatiales.
- Le vecteur gradient est orienté dans le sens de f croissant .

2 - <u>Divergence</u> :

La divergence est un opérateur scalaire qui agit sur un vecteur. On le note **div**

En coordonnées cartésiennes pour un vecteur $\mathbf{\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}}$ où les composantes sont des fonctions des variables x, y et z :

$$\mathbf{div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\mathbf{div\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

En coordonnées sphériques :

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi$$

3 – <u>Le rotationnel</u> :

Le rotationnel est un opérateur vectoriel qui agit sur un vecteur. On le note $\overrightarrow{\mathbf{rot}}$.

En coordonnées cartésiennes : $$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(rA_\varphi)\right]\vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi) - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi}\right]\vec{e}_z$$

En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(A_r r\sin\theta) - \frac{\partial}{\partial \varphi}A_\theta\right]\vec{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}A_r - \frac{\partial}{\partial r}(A_\varphi r\sin\theta)\right]\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right]\vec{e}_\varphi$$

4 – **Le Laplacien** :

Le Laplacien est un opérateur scalaire qui agit sur une fonction scalaire ou sur un vecteur. On le note **Δ**.

En coordonnées cartésiennes le Laplacien d'une fonction scalaire est :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En coordonnées sphériques :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Propriété : $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f) = \Delta f$

Remarques :

- Tous ces opérateurs s'expriment en fonction de l'opérateur $\vec{\nabla}$ appelé nabla :

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f = \vec{\nabla}.f \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$
$$\mathrm{div}\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} \qquad \Delta f = (\vec{\nabla})^2.f$$

- Tous ces opérateurs sont linéaires : $\mathbf{Op(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) = \alpha_1 Op(a_1) + \alpha_2 Op(a_2)}$

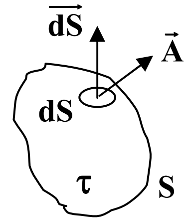
Quelques relations :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f.g) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f).g + f.\overrightarrow{\mathrm{grad}}(g)$$
$$\mathrm{div}(f.\vec{A}) = (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f)\vec{A} + f.\mathrm{div}\vec{A}$$
$$\mathrm{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A})\vec{B} - \vec{A}(\mathrm{rot}\vec{B})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f.\vec{A}) = f.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} + (\overrightarrow{\mathrm{grad}} f) \wedge \vec{A}$$
$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\vec{A}) = 0; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}} f) = \vec{0}; \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

III- Théorèmes de transformation d'intégrales vectorielles

1-Théorème d'Ostrogradsky :

On veut calculer le flux total d'un champ vectoriel $\vec{A}$ à travers une surface fermée **S**. On définit τ le volume délimité par **S**. On admet que les dérivées partielles de A_x, A_y et A_z sont continues dans τ. Le théorème d'Ostrogradski s'énonce ainsi :



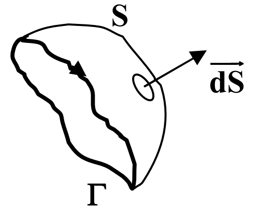
$$\oiint_S \vec{A}.\overrightarrow{dS} = \iiint_\tau div\vec{A}.d\tau$$

Le flux de $\vec{A}$ à travers une surface fermée **S** est égal à l'intégrale volumique sur τ de la divergence de $\vec{A}$

$\overrightarrow{dS}$ est orienté vers l'extérieur de la surface fermée **S**.

2-Théorème de Stokes :

On veut calculer la **circulation** d'un champ vectoriel $\vec{A}$ le long d'une **courbe fermée C**. On définit une surface **S** quelconque, mais dont le bord est délimité par le contour **Γ**. On admet que les dérivées partielles de A_x, A_y et A_z sont continues dans toute une région de $\mathbb{R}^3$ contenant **S**.



Le théorème de Stokes s'énonce ainsi :

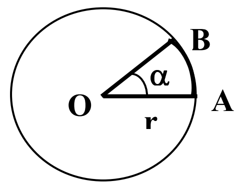
$$\oint_\Gamma \vec{A}.\overrightarrow{dl} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{A}.\overrightarrow{dS}$$

La circulation de $\vec{A}$, le long du contour **Γ,** est égale à l'intégrale double du rotationnel de $\vec{A}$ sur n'importe quelle surface **S** dont le bord est délimité par le contour **Γ**.

IV – Notion d'angle solide :

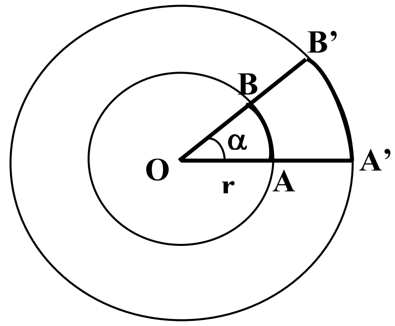
1- Angle plan

Considérons le centre O d'un cercle de rayon r. Soit un arc de cercle de longueur AB.



La mesure de l'angle α est en radian: $\alpha = \frac{AB}{r}$

L'angle α peut être défini à partir d'un cercle de rayon 2r. Dans ce cas, l'arc intercepté est de longueur double et la mesure de α est inchangée :

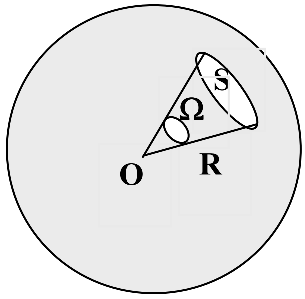


$$\alpha = \frac{AB}{r} = \frac{A'B'}{2r}.$$

L'angle α est une entité en soi indépendante du cercle qui a servi à en déterminer la mesure.

2 – <u>Angle solide</u> (dans l'espace):

Prenez une feuille de papier et enroulez-la en formant un cône. Si vous visez par le petit trou placé à la pointe de ce cône, vous avez une vision d'une fraction des directions de l'espace un peu comme avec l'angle vous avez une vision d'une portion du plan.



Vous pouvez déformer ce cône en appuyant sur ses côtés et vous avez une vision d'une fraction différente de l'espace. La fraction des directions de l'espace que vous apercevez, rapportée à 4π est ce que l'on appelle l'angle solide.

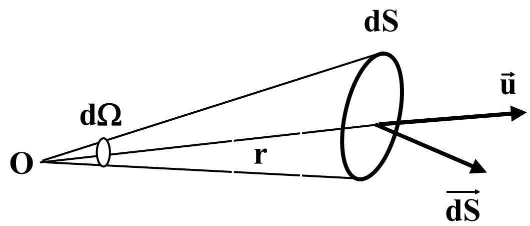
Pour déterminer la valeur d'un angle solide **Ω**, traçons une sphère de centre 0 et de rayon **R**. La surface du cercle interceptée par le cône est **S**. La division de **S** par $\mathbf{R^2}$ est la valeur de l'angle solide :

$$\Omega = \frac{S}{R^2}$$

L'angle solide est sans dimension. On dit qu'il est en stéradian. La valeur maximale de l'angle solide est 4π (l'angle solide sous lequel on voit à partir de O tout l'espace).

L' angle solide **Ω** sous lequel un élément de surface **dS** est vu depuis le point 0 est :

$$d\Omega = \frac{\overrightarrow{dS}.\vec{u}}{r^2}$$



où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire porté par le segment de droite joignant le point 0 à l'élément de surface **dS**.