Chapitre III : Les ondes électromagnétiques dans la matière

I. Equations de Maxwell dans la matière :

I. 1. Cas d'un milieu quelconque :

Dans la matière, les équations de base de l'électromagnétisme en régime statique sont (voir chapitres IV et V) :

$$div\vec{E} = \frac{\rho_t}{\varepsilon_0} = \frac{\rho + \rho_P}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow div\vec{D} = \rho \ ; \quad div\vec{B} = 0 \ ;$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_t = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_a) \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{j}$$

où ρ_P et $\vec{j}_a$ sont respectivement la densité des charges de polarisation et le vecteur densité de courant d'aimantation.

En régime variable, les deux premières relations restent valables mais avec des grandeurs qui sont toutes fonction du temps : $\vec{D}(M,t)$, $\vec{B}(M,t)$ et $\rho(M,t)$. La troisième relation, qui est la même que celle dans le vide en régime statique, conduit à une équation analogue à celle dans le vide en régime variable (voir chapitre III - <u>cours d'électricité 2</u> - pour la démonstration) et qui représente l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En régime variable, en plus des courants réels et d'aimantation il faut tenir compte du courant des charges de polarisation de densité $\vec{j}_P$ et du courant de déplacement. La 4ème équation s'écrit alors :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \vec{j}_a + \vec{j}_P + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

D'après l'équation de conservation de la charge électrique, le vecteur densité de courant des charges de polarisation est tel que :

$$div\vec{j}_p + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0$$

Or :

$$\rho_p = -div\vec{P}$$

Donc :

$$div\vec{j}_p + \frac{\partial}{\partial t}(-div\vec{P}) = div\vec{j}_p - div(\frac{\partial}{\partial t}\vec{P}) = div(\vec{j}_p - \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) = 0$$

Cette équation est bien vérifiée si on choisit $\vec{j}_P$ de sorte que :

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

D'autre part :

$$\vec{j}_a = \overrightarrow{rot}\vec{M}$$

Donc :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_o\left(\vec{j} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} + \overrightarrow{rot}\vec{M} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_o\vec{E})\right)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{rot}(\frac{\vec{B}}{\mu_o} - \vec{M}) = \left(\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_o\vec{E} + \vec{P})\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{rot}\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

I. 2. Cas d'un milieu LHI :

Dans un milieu linéaire homogène et isotrope :

$$\vec{D} = \varepsilon_o\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E} \text{ et } \vec{B} = \mu_o\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H}$$

Les équations de Maxwell dans un milieu LHI, s'écrivent donc :

$$div\vec{B} = 0\,,\; div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}\,,\; \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \text{ et } \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu(\vec{j} + \varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$$

Ces équations ont la même forme que celles dans le vide avec μ_0 et ε_0 remplacés par μ et ε.

I. 3. Cas d'un milieu diélectrique LHI :

Dans un milieu diélectrique (isolant), la densité des charges libres et le vecteur densité de courants réels sont nulles :

$$\rho = 0 \quad \text{et} \quad \vec{j} = 0$$

Les équations de Maxwell s'écrivent donc :

$$div\vec{B} = 0\,,\quad div\vec{E} = 0\,,\quad \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu\varepsilon\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

Ces équations sont analogues à celles obtenues dans le vide en absence de charges et de courants avec μ_0 et ε_0 remplacés par μ et ε. Donc, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ vérifient l'équation des ondes :

$$\Delta\vec{F} - \frac{1}{v}\frac{\partial^2\vec{F}}{\partial t^2} \quad \text{avec :} \; v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

II- Les ondes planes dans un milieu diélectrique LHI :

Comme dans le cas des ondes planes dans le vide, les ondes planes électromagnétiques dans un milieu diélectrique LHI sont de la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \text{ et } \vec{B} = \vec{B}_o e^{j(\omega t - \vec{k}\vec{r})}$$

où $\vec{k}$ est le vecteur d'onde, dans le milieu considéré, défini par :

$$\vec{k} = k\vec{u} = \frac{\omega}{v}\vec{u}$$

$\vec{u}$ étant le vecteur unitaire de la direction de propagation et v est la vitesse de l'onde, dans le milieu, qui est appelée vitesse de phase.

Comme dans le cas des ondes planes dans le vide, les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont transverses et liés par la relation :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

En général, la permittivité ε du milieu est fonction de la pulsation ω de l'onde et la relation entre k et ω, appelée relation de dispersion, est donnée par :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2} = \varepsilon(\omega)\mu\omega^2$$

ou encore :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega)\mu_r$$

Remarques :

- Pour les milieux diélectriques μ_r est voisin de l'unité et par suite la relation de dispersion s'écrit :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r(\omega)$$

- En représentation complexe, la permittivité relative $\varepsilon_r(\omega)$ et le vecteur d'onde k peuvent être complexe (c'est le cas des milieux absorbants).

II. 1. Cas des milieux diélectriques absorbants :

Considérons une onde plane progressive qui se déplace, dans la direction de l'axe OX, dans un milieu diélectrique absorbant. L'absorption de l'onde se traduit mathématiquement par une décroissance exponentielle de l'amplitude de l'onde en fonction de x :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(kx-\omega t)} = \vec{E}_0 e^{-k''x} e^{j(k'x-\omega t)} = \vec{E}_0 e^{j\left[(k'+jk'')x-\omega t\right]}$$

Soit :

$$k = k' + jk''$$

Le vecteur d'onde k est donc complexe avec une partie imaginaire k'' positive (qui rend compte de l'absorption de l'onde) et une partie réelle également positive (qui rend compte de la propagation de l'onde). La vitesse de phase (vitesse de déplacement de l'onde dans le milieu) est donnée par :

$$v = \frac{\omega}{k'}$$

D'après la relation de dispersion :

$$k^2 = (k'+jk'')^2 = k'^2 - k''^2 + 2jk'k'' = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_r \Rightarrow \varepsilon_r = \frac{c^2}{\omega^2}(k'^2 - k''^2) + j\frac{2c^2k'k''}{\omega^2} = \varepsilon'_r + j\varepsilon''_r$$

La permittivité du milieu diélectrique (appelée également <u>constante diélectrique</u> du milieu) est donc également complexe :

$$\varepsilon = \varepsilon' + j\varepsilon''$$

Si on introduit <u>l'indice complexe</u> du milieu défini par :

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} = n' + jn''$$

On obtient alors les relations :

$$k' = \frac{\omega}{c}n' \;;\quad k'' = \frac{\omega}{c}n'' \;;\quad \varepsilon_{r'} = n'^2 - n''^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon''_r = 2n'n''$$

La partie réelle n' de l'indice complexe est appelée <u>indice de réfraction</u> du milieu et s'exprime par :

$$n' = \frac{k'}{\omega}c = \frac{c}{v}$$

La partie imaginaire n" de l'indice complexe est appelée <u>coefficient d'extinction</u> de l'onde dans le milieu considéré et s'exprime par :

$$n'' = \frac{k''}{\omega}c = \frac{k''}{k_0}$$

où k_0 est le vecteur d'onde de l'onde plane considérée dans le vide.

Pour étudier l'aspect énergétique de l'onde progressive qui se déplace dans le milieu diélectrique absorbant on doit exprimer le vecteur de Poynting $\vec{R}$. En représentation réelle, ce vecteur est donné par :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = c^2 \varepsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B}$$

Or, en représentation complexe :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-k''x} e^{j(k'x-\omega t)} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{k}{\omega}\vec{u} \wedge \vec{E} = \frac{n}{c}\vec{u} \wedge \vec{E} = \frac{n'+jn''}{c}(\vec{u} \wedge \vec{E}_o) e^{-k''x} e^{j(k'x-\omega t)}$$

Donc, en représentation réelle :

$$\vec{E} = \vec{E}_o e^{-k''x}\cos(k'x-\omega t) \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{1}{c}(\vec{u} \wedge \vec{E}_o) e^{-k''x}\left[n'\cos(k'x-\omega t) - n''\sin(k'x-\omega t)\right]$$

D'où :

$$\vec{R} = \left[n'\cos^2(k'x-\omega t) - n''\sin(k'x-\omega t)\cos(k'x-\omega t)\right] c\varepsilon_o E_o^2 e^{-2k''x}\vec{u}$$

La valeur moyenne de $\vec{R}$ est donc :

$$\vec{R}_{moy} = \frac{1}{2} c n' \varepsilon_o E_o^2 e^{-2k''x}\vec{u}$$

Cette expression, qui représente le flux énergétique par unité de surface, montre que l'énergie de l'onde décroît en $e^{-2k''x}$. Donc, si ϕ_0 est le flux énergétique d'une onde incidente dans le vide qui passe dans un milieu diélectrique absorbant situé dans la région des x positifs ; alors, le flux ϕ de l'onde dans le milieu diélectrique s'exprime par :

$$\phi = \phi_0 e^{-2k''x} = \phi_0 e^{-\alpha x}$$

Le coefficient α, appelé <u>coefficient d'absorption</u>, s'exprime par :

$$\alpha = 2k'' = 2n''k_0 = \frac{4\pi\, n''}{\lambda_0}$$

où λ_0 est la longueur d'onde de l'onde considérée dans le vide.

II. 2. Cas des milieux diélectriques non absorbants :

Dans un milieu diélectrique non absorbant (donc transparent) pour la fréquence angulaire ω, k" est nulle. Donc, k, n et ε sont réels.

La relation de dispersion s'écrit :

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_r(\omega)} = \omega\frac{n}{c}$$

La vitesse de phase de l'onde électromagnétique est alors :

$$v=\frac{\omega}{k}=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}=\frac{c}{n}.$$

Pour les milieux transparents dans le domaine optique ou infrarouge, ε_r est supérieur à l'unité et la vitesse de phase dans ces milieux est donc toujours inférieure à c.

L'indice de réfraction n en optique est donc toujours supérieur à 1.

La longueur d'onde dans un tel milieu correspond à la période spatiale :

$$\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi}{\omega}\frac{c}{n}=\frac{\lambda_o}{n}$$

où λ_o est la longueur d'onde de l'onde électromagnétique, de même fréquence, qui se propagerait dans le vide.

Dans un milieu transparent, le vecteur de Poynting instantané de l'onde électromagnétique est :

$$\vec{R}=cn\varepsilon_o E^2\vec{u}$$

Donc, le flux énergétique par unité de surface est :

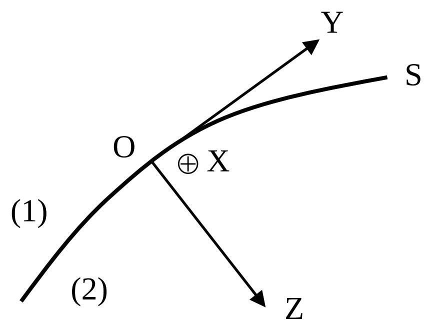
$$\vec{R}_{moy}=\frac{1}{2}cn\varepsilon_o E_o^2\vec{u}$$

On remarque que ce flux reste constant; ce qui traduit bien le fait que le milieu soit non absorbant.

III. Réflexion et réfraction d'une onde plane sur l'interface de deux diélectriques LHI :

III. 1. Relations de passage à l'interface de deux diélectriques LHI :

Soit deux milieux diélectriques LHI, (1) et (2), séparés par une surface S que nous confondrons localement (au voisinage du point O) avec son plan tangent XOY. La direction OZ est donc normale à cette surface.



Si les milieux sont considérés comme des isolants parfaits, alors : $\rho=0$ et $j=0$

Les relations de passage à la traversée de l'interface (surface de séparation) entre les deux diélectriques s'écrivent donc :

$D_{1z} = D_{2z}$ et $B_{1z} = B_{2z}$ (continuité des composantes normales de $\vec{D}$ et $\vec{B}$)

$E_{1x} = E_{2x}$; $E_{1y} = E_{2y}$; $H_{1x} = H_{2x}$ et $H_{1y} = H_{2y}$ (continuité des composantes tangentielles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$)

Avec :

$$\vec{D}_1 = \varepsilon_o \varepsilon_{r1} \vec{E}_1 \ ; \ \vec{D}_2 = \varepsilon_o \varepsilon_{r2} \vec{E}_2 \ ; \ \vec{B}_1 = \mu_o \vec{H}_1 \text{ et } \vec{B}_2 = \mu_o \vec{H}_2 (\text{car } \mu \approx \mu_0)$$

En désignant par E_t et E_n les composantes tangentielle et normale de $\vec{E}$, par rapport à l'interface, on obtient les relations suivantes :

$$E_{1t} = E_{2t} \ ; \ \varepsilon_{r1} E_{1n} = \varepsilon_{r2} E_{2n} \text{ et } B_1 = B_2$$

III. 2. Lois de la réflexion et de la réfraction d'une onde plane monochromatique :

Soit une onde électromagnétique plane et monochromatique, de vecteur d'onde $\vec{k}_1$ se propageant dans un milieu diélectrique (1) non absorbant. Cette onde arrive à l'interface, supposée localement plane, séparant le milieu (1) d'un second milieu diélectrique (2) supposé également transparent. L'expérience montre, dans le cas le plus générale, que cette onde dite « onde incidente » donne naissance à une onde plane réfléchie de vecteur d'onde $\vec{k}'_1$ et une onde plane réfractée de vecteur d'onde $\vec{k}_2$.

Pour déterminer les caractéristiques des ondes réfléchie et transmise en fonction de celles de l'onde incidente on utilise le fait que ces ondes doivent satisfaire les relations de passages établies ci-dessus. Ces relations conduisent toutes à des égalités de la forme :

$$a_1 e^{j(\vec{k}_1 \vec{r} - \omega_1 t)} + a'_1 e^{j(\vec{k}'_1 \vec{r} - \omega'_1 t)} = a_2 e^{j(\vec{k}_2 \vec{r} - \omega_2 t)} \qquad \forall \vec{r} \ \ et \ \ t$$

où a_1 , a'_1 et a_2 sont des constantes et ω_1, ω'_1 et ω_2 sont les pulsations des ondes incidente, réfléchie et transmise respectivement.

Si on introduit le vecteur position $\vec{r}_0$ du point O fixe de la surface de séparation, le vecteur position $\vec{r}$ d'un point M de la surface (du voisinage de O) s'exprime par :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}_t$$

où $\vec{r}_t$ est un vecteur tangent à la surface de séparation en O.

Les relations de passage s'écrivent donc sous la forme :

$$A_1 + A'_1 e^{j\left[(\vec{k}'_1 - \vec{k}_1)\vec{r}_t - (\omega'_1 - \omega_1)t\right]} = A_2 e^{j\left[(\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\vec{r}_t - (\omega_2 - \omega_1)t\right]} \qquad \forall \vec{r}_t \ \ et \ \ t$$

Avec :

$$A_1 = a_1 e^{j\vec{k}_1 \vec{r}_0} ; \ A'_1 = a'_1 e^{j\vec{k}'_1 \vec{r}_0} \ \ et \ \ A_2 = a_2 e^{j\vec{k}_2 \vec{r}_0}$$

L'équation ci-dessus ne peut être vérifiée à tout instant t et pour tout vecteur $\vec{r}_t$ tangent à la surface que si :

$$(\vec{k}'_1 - \vec{k}_1)\vec{r}_t = (\vec{k}_2 - \vec{k}_1)\vec{r}_t = 0 \qquad \text{et} \quad (\omega'_1 - \omega_1) = (\omega_2 - \omega_1) = 0$$

D'où :

$$\vec{k}'_1 - \vec{k}_1 = \alpha \vec{n} \quad ; \quad \vec{k}_2 - \vec{k}_1 = \beta \vec{n} \quad \text{et} \quad \omega'_1 = \omega_2 = \omega$$

où α et β sont deux constantes et $\vec{n}$ est un vecteur unitaire normal à la surface de séparation entre les deux milieux considérés.

Ces dernières relations montrent que les ondes réfléchies et réfractées ont la même fréquence que celle de l'onde incidente alors que les vecteurs d'onde sont différents, de ceux de l'onde incidente, en module et en direction.

Les relations pour les vecteurs d'onde s'écrivent sous la forme :

$$\vec{k}'_1 = \vec{k}_1 + \alpha\vec{n} \quad \text{et} \quad \vec{k}_2 = \vec{k}_1 + \beta\vec{n}$$

Ces relations montrent que les vecteurs d'onde des ondes réfléchie et réfractée sont tous les deux dans le plan contenant le vecteur d'onde de l'onde incidente et la normale à la surface de séparation (appelé plan d'incidence).

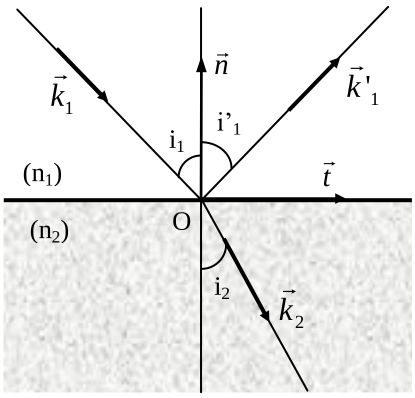
Plaçons-nous dans le plan d'incidence et multiplions les deux dernières relations par le vecteur unitaire $\vec{t}$ tangent à l'interface et situé dans le plan d'incidence (voir figure ci-dessous), on obtient alors :

$$\vec{k}'_1\,\vec{t} = \vec{k}_1\vec{t} \quad \text{et} \quad \vec{k}_2\vec{t} = \vec{k}_1\vec{t}$$

Avec :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\; n}{\lambda_o}$$

où λ_o est la longueur d'onde dans le vide de l'onde plane considérée et n est l'indice de réfraction du milieu.



En introduisant les angles i_1, i'_1 et i_2 appelés respectivement angle d'incidence, de réflexion et de réfraction, les dernières relations s'écrivent :

$$\sin i'_1 = \sin i_1 \Leftrightarrow i'_1 = i_1 \quad \text{et} \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

où i_1, i'_1 et i_2 sont compris entre 0 et 90°

Nous avons retrouvé ainsi les fameuses relations, reconnues sou le nom des lois de Snell-Descartes, qui régissent la propagation des rayons lumineux de l'optique géométrique ; ce qui confirme l'aspect ondulatoire de la lumière : la lumière est une onde électromagnétique.

III. 3. Coefficients de réflexion et de transmission en incidence normale :

Soit une onde électromagnétique plane sinusoïdale qui atteint, sous une incidence normale (i_1 = 0), la surface S séparant deux milieux transparents (1) et (2) d'indices respectifs n_1 et n_2. Les champs électrique $\vec{E}_i$ et magnétique $\vec{B}_i$ de cette onde sont parallèles à la surface de séparation. De même pour les champs ($\vec{E}_r, \vec{B}_r$) et ($\vec{E}_t, \vec{B}_t$) des ondes réfléchies et transmises. Donc, les relations de passage pour les champs électrique et magnétique, en O, s'écrivent :

$$\begin{cases} E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} & (1) \\ \dfrac{n_1}{c} E_{0i} - \dfrac{n_1}{c} E_{0r} = \dfrac{n_2}{c} E_{0t} & (2) \end{cases}$$

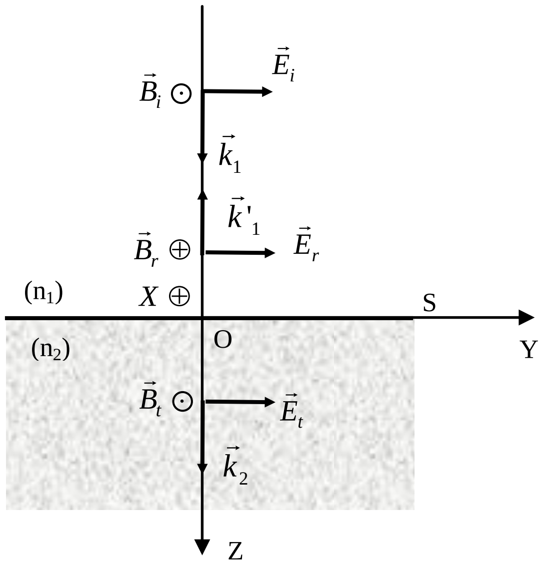
Pour obtenir le système d'équations ci-dessus on a tenu compte du fait que :

$$\vec{k}\vec{r} = 0 \text{ (en O)} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \Rightarrow B = \frac{n}{c} E$$

La résolution de ce système permet d'obtenir les expression des coefficients de réflexion ρ et de transmission t en incidence normale :

$$\rho = \frac{E_{0r}}{E_{0i}} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad t = \frac{E_{0t}}{E_{0i}} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

Les coefficients ρ et t, définis par les rapports des amplitudes des ondes réfléchies et transmises à celle de l'onde incidente sont appelés coefficients de Fresnel.



Remarques :

- L'expression de ρ montre que la réflexion sur un milieu plus réfringent que le milieu d'incidence ($n_1<n_2$) s'accompagne d'un changement de signe de l'amplitude de l'onde incidente ; ce qui ce traduit par un l'introduction d'un déphasage de π. En effet :

$$-E_{0r} = E_{0r}e^{j\pi}$$

- Les expressions de r et t sont encore valables pour des milieux absorbants; les indices n_1 et n_2 étant alors complexes.
- Dans les milieux non absorbant on constate que :

  - t est positif quelque soient n_1 et n_2 : la transmission se fait sans changent de phase.

  - r est positif ou négatif suivant les valeurs de n_1 et n_2 :

    si $n_1> n_2$, la réflexion n'introduit pas de changement de phase.

    si $n_1< n_2$, la réflexion introduit un changement de phase de π.

- Si on s'intéresse aux puissances au lieu des amplitudes, on définit les <u>facteurs de réflexion et de transmission</u> (énergétiques) R et T par :

$$R = \frac{P_{réfléchie}}{P_{incidente}} = \frac{scn_1\varepsilon_0(E_{0r})^2}{scn_1\varepsilon_0(E_{0i})^2} = \left(\frac{E_{or}}{E_o}\right)^2 = \rho^2 \quad \Rightarrow \quad R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

$$T = \frac{P_{transmise}}{P_{incidente}} = \frac{scn_2\varepsilon_0(E_{0t})^2}{scn_1\varepsilon_0(E_{0i})^2} = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{E_{ot}}{E_o}\right)^2 = \frac{n_2}{n_1}t^2 \Rightarrow \quad T = \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}$$

où la puissance P est donnée par le flux du vecteur de Poynting à travers la surface s (voir § II. 2. de ce chapitre).

- On vérifie bien la relation qui traduit la conservation d'énergie pour des milieux transparents:

$$R + T = 1$$

<u>IV. Les ondes électromagnétique planes dans les milieux conducteurs :</u>

<u>IV. 1. Propagation d'une onde plane dans un conducteur :</u>

Dans un conducteur de conductivité électrique γ, la densité de charges réelles ρ et nulle et le vecteur densité de courant réels $\vec{j}$ est lié au champ électrique par la relation :

$$\vec{j} = \gamma\, \vec{E}$$

L'équation d'onde pour le champ électrique s'écrit donc :

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} + \frac{\overrightarrow{grad}\rho}{\varepsilon} = \mu\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

où v est la vitesse de phase de l'onde donnée par :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Une onde plane progressive qui se propage suivant l'axe OX ($\vec{E}=\vec{E}_0 e^{i(kx-\omega t)}$) est solution de cette équation si :

$$k^2=\frac{\omega^2}{v^2}+i\mu\gamma\omega \quad \text{ou encore :} \quad k=\frac{\omega}{v}\sqrt{\left(1+i\frac{\gamma}{\varepsilon\omega}\right)}$$

k est donc complexe et on peut l'écrire sous la forme :

$$k = k_1 + ik_2$$

Le champ électrique de l'onde considérée s'écrit donc :

$$\vec{E}=\vec{E}_0 e^{-k_2 x} e^{i(k_1 x-\omega t)}$$

L'amplitude de l'onde décroît exponentiellement en se propageant dans un tel milieu.
La vitesse de phase de l'onde est dans ce cas donnée par :

$$v=\frac{\omega}{k_1}$$

Dans un bon conducteur et pour des faibles fréquences, ce qui est le cas des ondes du domaine optique par exemple, on a :

$$\frac{\gamma}{\varepsilon_0\omega}>>1$$

D'où :

$$k_2=\frac{\gamma\omega}{\varepsilon_0 c^2}=\frac{1}{\delta}$$

où δ est la distance au bout de laquelle l'amplitude de l'onde est réduite d'un facteur e. Cette distance est appelée profondeur de pénétration.

En général, les champs s'amortissent sur une profondeur de pénétration δ très faible. On dit alors qu'il y'a un effet de peau : le champ et le courant associé sont localisés au niveau de la surface du conducteur.

Si le conducteur est parfait, la conductivité est infinie et par suite toutes les grandeurs, $\vec{E}$, $\vec{B}$, ρ et $\vec{j}$ sont nulles en tout point et à tout instant. En effet : $\vec{j}=\gamma\vec{E}$; donc une valeur infinie de γ exclut toute possibilité pour $\vec{E}$ d'avoir une valeur différente de zéro.

IV. 2. Les champs au voisinage du conducteur parfait (métal) :

Les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ étant uniformément nuls dans le métal, les composantes normales et tangentielles sont donc toutes nulles dans le métal au voisinage de sa surface. La continuité de la composante tangentielle du champ électrique impose alors que cette composante est également nulle au voisinage extérieur du métal :

$$E_t=0$$

De même, la continuité de la composante normale du champ magnétique impose que cette composante est nulle au voisinage extérieur du métal :

$$B_n=0$$

S'il existe au voisinage extérieur du métal une composante normale $\vec{E}_n$ du champ électrique, alors la surface du métal porte une charge surfacique libre (réelle) de densité telle que :

$$\vec{E}_n = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à la surface du métal et dirigé vers l'extérieur du métal.

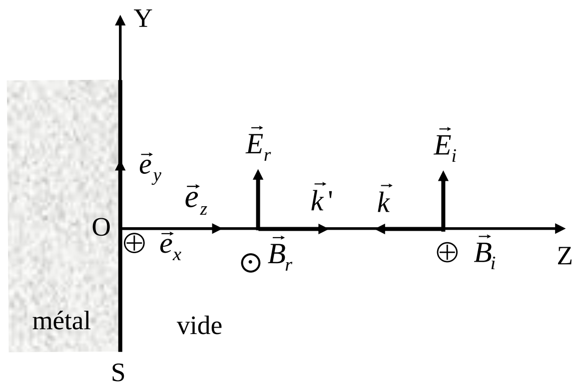
Si le champ magnétique possède une composante tangentielle $\vec{B}_t$, alors la surface du métal est le siège d'un courant surfacique réel de densité j telle que :

$$\vec{B}_t = \mu_o \vec{j} \wedge \vec{n}$$

IV. 3. Réflexion d'une onde plane sur un métal (cas d'une incidence normale) :

Soit une onde plane monochromatique de pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k}$, qui se propage dans le vide et qui atteint la surface S, supposée localement plane au voisinage du point d'impact O, d'un conducteur parfait. L'onde plane considérée atteint la surface S sous une incidence normale.
Les vecteurs d'onde $\vec{k}$ de l'onde incidente et $\vec{k}'$ de l'onde réfléchie sont :

$$\vec{k} = -k\vec{e}_z \text{ et } \vec{k}' = k\vec{e}_z$$



IV. 3. 1. Etude du champ électrique :

Supposons que le champ électrique de l'onde incidente est suivant la direction de l'axe OY :

$$\vec{E}_i(z,t) = \vec{E}_o e^{j(\omega t + kz)} = E_{oy} e^{j(\omega t + kz)} \vec{e}_y$$

Les composantes du champ électrique de l'onde réfléchie sont :

$$\vec{E}_{rx}(z,t) = E_{0rx} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \vec{E}_{ry}(z,t) = E_{0ry} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_y$$

Puisque le champ est nul dans le métal, la continuité de la composante tangentielle de $\vec{E}$ à la traversée de la surface du métal donne :

$$\vec{E}_t = \vec{E}_i(0,t) + \vec{E}_r(0,t) = 0$$

D'où :

$$E_{rx}(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; E_{0rx} = 0 \quad \text{et}$$

$$E_{iy}(0,t) + E_{ry}(0,t) = 0 \;\Rightarrow\; E_{0i} + E_{0r} = 0 \;\Rightarrow\; E_{0r} = -E_{0i} \Leftrightarrow r = -1$$

La réflexion a lieu avec un changement de signe de l'amplitude du champ électrique (ou avec un changement de phase de π). La composante normale du champ électrique étant nulle, la charge surfacique σ est donc également nulle.

IV. 3. 2. Etude du champ magnétique :

Pour le champ magnétique de l'onde plane considérée on a :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E} \;\Rightarrow\; \vec{B}_i(z,t) = \frac{E_{0i} e^{j(\omega t + kz)}}{c} \vec{e}_x$$

De même pour l'onde réfléchie :

$$\vec{B}_r(z,t) = -\frac{E_{0r}}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x = \frac{E_{0i}}{c} e^{j(\omega t - kz)} \vec{e}_x = \vec{B}_i(z,t)$$

La réflexion se fait donc sans changement de signe pour le champ magnétique.

La composante tangentielle du champ magnétique dans le vide, au voisinage de la surface du métal, est :

$$\vec{B}_t(0,t) = \frac{2E_{0i}}{c} e^{j(\omega t)} \vec{e}_x$$

Cette composante présente donc une discontinuité qui ne peut être qu'une conséquence de la présence d'un courant surfacique de densité $\vec{j}$ telle que :

$$\vec{B}_t(0,t) = \mu_o \vec{j} \wedge \vec{e}_z$$

D'où :

$$\frac{2E_{0i}}{c} e^{i(\omega t)} \vec{e}_x = \mu_o \vec{j} \wedge \vec{e}_z$$

On est donc amené à concevoir un courant surfacique de densité $\vec{j}$ donnée par :

$$\vec{j} = \frac{2E_{0i}}{c\mu_o} e^{j(\omega t)} \vec{e}_y$$

IV. 3. 3. Superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie : Onde stationnaire

L'incidence étant normale, l'onde incidente et l'onde réfléchie se superposent dans tout le demi-espace z > 0.

Le champ électrique total est :

$$\vec{E}(z,t) = \vec{E}_i(z,t) + \vec{E}_r(z,t) = E_{0i} e^{j\omega t}\left(e^{jkz} - e^{-jkz}\right)\vec{e}_y = 2jE_{0i} e^{j\omega t}(\sin kz)\vec{e}_y$$

Soit en notation réelle :

$$\vec{E}(z,t) = 2E_{0i} \sin kz \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})\vec{e}_y$$

Pour ce champ $\vec{E}$, il n'y a plus de phénomène de propagation et l'onde est dite <u>stationnaire</u> d'amplitude $2E_{0i} \sin kz$.

De même pour le champ magnétique total :

$$\vec{B}(z,t) = \vec{B}_i(z,t) + \vec{B}_r(z,t) = \frac{E_{0i}}{c} e^{j\omega t}\left(e^{jkz} + e^{-jkz}\right)\vec{e}_x = \frac{2E_{0i}}{c} e^{j\omega t} (\cos kz)\vec{e}_x$$

Soit en notation réelle :

$$\vec{B}(z,t) = \frac{2E_{0i}}{c} \cos kz \cos(\omega t + \pi)\vec{e}_x$$

Comme pour le champ électrique, il n'y a pas de propagation du champ magnétique, mais seulement une <u>onde stationnaire</u> d'amplitude $\frac{2E_{0i}}{c} \cos kz$.

Comme pour toutes les ondes stationnaires, les points M de l'axe OZ pour lesquelles $\vec{E}$ (ou $\vec{B}$) est nul à tout instant sont appelés <u>des nœuds</u> alors que les points pour lesquelles l'amplitude de $\vec{E}$ (ou $\vec{B}$) est maximale (en valeur absolue) à tout instant sont appelés <u>des ventres</u>.

Les nœuds du champ électrique sont tels que :

$$\sin kz = \sin \frac{\omega z}{c} = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega z}{c} = n\pi \Leftrightarrow z = n\pi \frac{c}{\omega} = n\frac{\lambda}{2}$$

Les nœuds du champ magnétique sont tels que :

$$\cos kz = 0 \Leftrightarrow z = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

Deux nœuds voisins du champ électrique (ou du champ magnétique) sont distants de $\frac{\lambda}{2}$ alors que deux nœud voisins du champ électrique et du champ magnétique sont distants de $\frac{\lambda}{4}$.

Sur la surface métallique on a un nœud de champ électrique.

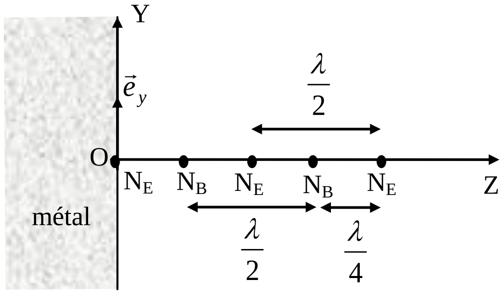
Les ventres du champ électrique sont tels que :

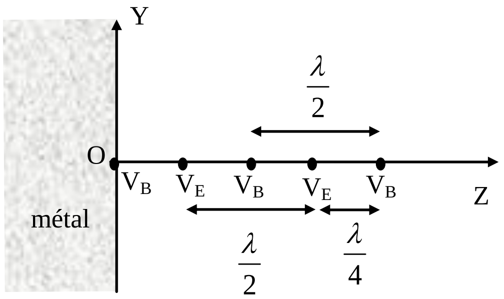
$$|\sin kz| = \left|\sin \frac{\omega z}{c}\right| = 1 \Leftrightarrow z = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$$

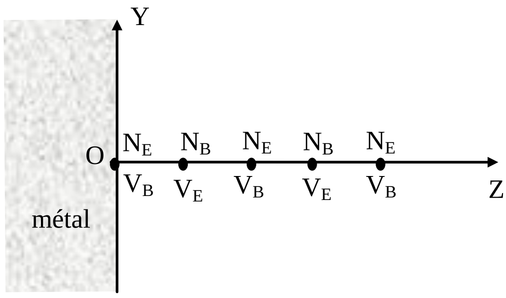
Les ventres du champ magnétique sont tels que :

$$|\cos kz| = \left|\cos \frac{\omega z}{c}\right| = 1 \Leftrightarrow z = n\frac{\lambda}{2}$$

on constate que les nœuds et les ventres pour l'un des champs $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ sont alternés et distants de $\frac{\lambda}{4}$ et que les nœuds du champ électrique correspondent aux ventres du champ magnétique et inversement. Sur la surface métallique on a un ventre de champ magnétique.


Y
$\vec{e}_y$
$\frac{\lambda}{2}$
O
N_E N_B N_E N_B N_E
Z
métal
$\frac{\lambda}{2}$
$\frac{\lambda}{4}$


Y
$\frac{\lambda}{2}$
O
V_B V_E V_B V_E V_B
Z
métal
$\frac{\lambda}{2}$
$\frac{\lambda}{4}$


Y
N_E N_B N_E N_B N_E
O
V_B V_E V_B V_E V_B
Z
métal