
Contrôles corrigées 2
Tome 1
Electricité,optique,chimie
analyse et Algèbre
Filière : SMP SMC
Semmestre 2
Contrôle N° :1
Année Universitaire 2009/2010
www.rapideway.org/vb

بسم الله الرحمن الرحيم

نضع بين أيديكم هذا الكتيب في جزئه الثالث و الذي يضم مجموعة من امتحانات للسنوات السابقة مصحوبة بنماذج حلول لبرنامج السنة الأولى لشعب الفيزياء و الكيمياء و الرياضيات ولقد تم إعداد هذا العمل المتواضع من اجل إحاطة الطلبة علما بطريقة وضع الامتحانات و أخذ فكرة مسبقة عن نوعية الأسئلة . و المطلوب من الطالب قبل الشروع في حل الامتحانات مراجعة الدروس و تمارين الأعمال الموجهة جيدا لاستعاب المفاهيم و ليسهل اختبار قدرات الطالب .

و في الختام نشكر كل الطلبة الدين ساهموا من قريب أو بعيد في هذا الانجاز المتواضع و إن شاء الله يكون وسيلة ايجابية لتحصيل العلمي و لتحسين التعليمي لطلبة .

للاستفسار

info@rapideway.com

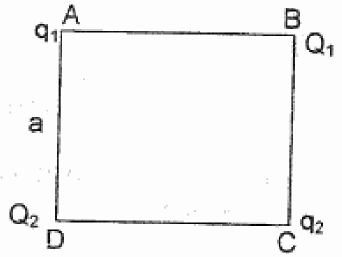
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique
Marrakech

Année Universitaire 2008/09

Epreuve d'Electricité
Filières : SMP-SMC-SMA Semestre 2
1^er^ contrôle (Durée : 1h30')

EXERCICE I

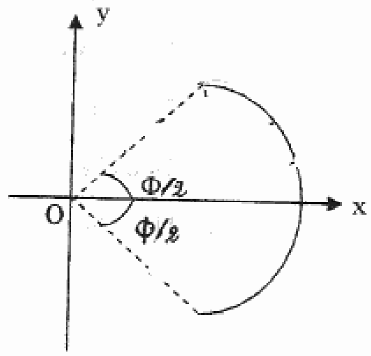
Soient q_1, Q_1, q_2, et Q_2 quatre charges électriques disposées aux quatre sommets d'un carré de côté a (voir figure). On suppose que $q_1 = q_2 = q$, $Q_1 = Q_2 = Q$ et que la force résultante agissant sur Q_1 est nulle.



1) Calculer et représenter la force $\vec{F}_{Q_2Q_1}$ exercée par la charge Q_2 sur la charge Q_1
2) Calculer et représenter les forces $\vec{F}_{q_1Q_1}$ et $\vec{F}_{q_2Q_1}$ exercées par les charges q_1 et q_2 sur la charge Q_1
3) Calculer la charge Q en fonction de la charge q sachant que: $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9\,10^9\ SI$

EXERCICE II

Un fil portant une charge positive q a la forme d'un arc de cercle de centre O, de rayon r et d'angle Φ (voir figure)

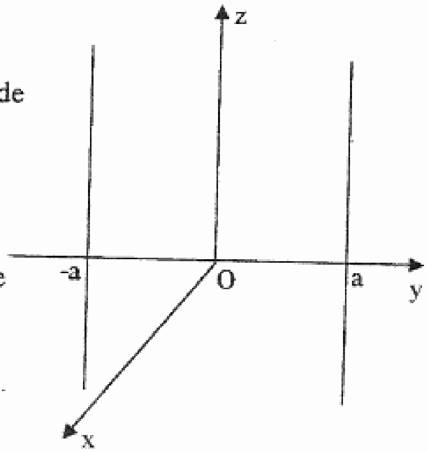


1) sachant que la charge q est uniformément répartie, calculer le vecteur champ électrique $\vec{E}$ au point O crée par cette distribution
2) Que devient $\vec{E}$ pour l'angle $\Phi = 0$, $\Phi = \pi$, $\Phi = 2\pi$

EXERCICE III

Soit un fil infiniment long portant une densité linéique de charge $\lambda > 0$.

1) Calculer le champ électrostatique en un point M à la distance r du fil. En déduire le potentiel en ce point.



On dispose maintenant de deux fils infiniment longs, tels que le fil 1, chargé avec une densité linéique λ, est en $y = a$ et le fil 2, chargé avec une densité linéique $-\lambda$, est en $y = -a$ (voir figure). Soit M un point de l'espace à la distance r_1 du fil 1 et r_2 du fil 2.

2) Etablir l'expression du potentiel au point M en fonction de λ, r_1 et r_2, On choisit l'origine des potentiels au point O.

3) En posant $k = e^{\left(\frac{2\pi\varepsilon_o V_o}{\lambda}\right)}$, déduire l'équation de la surface équipotentielle lieu des points M ayant le même potentiel V_o.

EXERCICE IV

Une distribution de charges à symétrie sphérique autour d'un point O crée en un point M quelconque de l'espace situé à une distance OM = r, un potentiel électrostatique de la forme suivante :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r} e^{-\frac{r}{a}}$$ où a et q sont des constantes positives.

1) Déterminer la direction, le sens et le module du champ électrostatique associé à cette distribution de charges

2) Calculer le flux $\Phi(r)$ du champ électrostatique $\vec{E}$ à travers une sphère de centre O et de rayon r

3) Déterminer les limites du flux du champ $\vec{E}$ quand r tend vers zéro et quand r tend vers l'infini

4) En déduire laquelle des distributions de charges suivantes peut créer ce potentiel et ce champ; Justifier votre choix

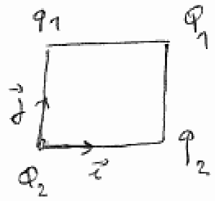
   a. Une charge q placée en O et une charge –q répartie dans tout l'espace
   b. Une charge –q placée en O et une charge q répartie dans tout l'espace
   c. Une charge –q répartie dans tout l'espace
   d. Une charge q placée en O et une charge 2q placée dans tout l'espace

contrôle N°1 Electricité

2008/2009 SMPC/SMA

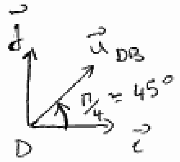
Exercice I :

1/ calcule et représentation de la force $\vec{F}_{Q_2Q_1}$



on a $\vec{F}_{Q_2Q_1} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{\vec{u}_{DB}}{DB^2}$

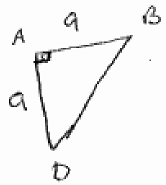
$\vec{u}_{DB}$: Vecteur unitaire :



$\vec{u}_{DB} = \cos\frac{\pi}{4}\vec{i} + \sin\frac{\pi}{4}\vec{j}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

et on a ABCD est un carré de côté a



$AD^2 + AB^2 = DB^2$

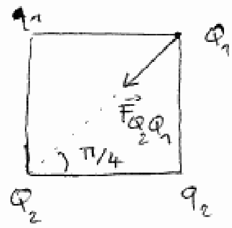
$a^2 + a^2 = DB^2 \Rightarrow DB^2 = 2a^2$

d'où $\vec{F}_{Q_2Q_1} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{2a^2} \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} + \vec{j})$

avec $Q_1 = Q_2 = Q$

$\vec{F}_{Q_2Q_1} = \frac{\sqrt{2}\,Q^2}{16\pi\varepsilon\, a^2}(\vec{i} + \vec{j})$

* représentation



on prend $Q < 0$ (choix)

donc $\vec{F}_{Q_2Q_1} =$

2/ calcule la force $\vec{F}_{q_1Q_1}$

on a $\vec{F}_{q_1Q_1} = \frac{q_1 Q_1}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{u}_{AB}}{AB^2}$

avec $\vec{u}_{AB} = \vec{i}$; $q_1 = q$ et $Q_1 = Q$ et $AB = a$

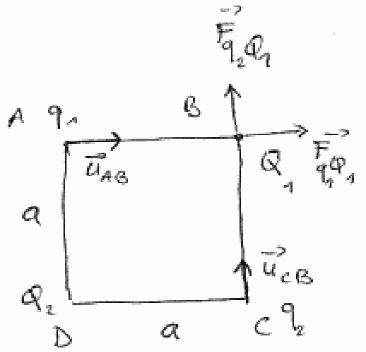
d'où $\vec{F}_{q_1Q_1} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon} \frac{1}{a^2} \vec{i}$

* la force $\vec{F}_{q_2Q_1}$

on a $\vec{F}_{q_2Q_1} = \frac{q_2 Q_1}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{u}_{CB}}{CB^2}$

avec $q_2 = q$, $Q_1 = Q$, $\vec{u}_{CB} = \vec{j}$, $CB = a$

d'ou $\vec{F}_{q_2 Q_1} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\vec{j}$.



* représentation

en prend $q > 0$

3/ calculons Q en fonction de q

on a la force résultante agissant sur Q_1 est nulle

donc $\vec{F}_{q_1Q_1} + \vec{F}_{q_2Q_1} + \vec{F}_{Q_2Q_1} = \vec{0}$

$$\frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\vec{i} + \frac{qQ}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\vec{j} + \frac{\sqrt{2}QQ}{4\times4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}(\vec{i}+\vec{j}) = \vec{0}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\left(q\vec{i} + q\vec{j} + \frac{\sqrt{2}}{4}Q(\vec{i}+\vec{j})\right) = \vec{0}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2}\left(\left(q+\frac{\sqrt{2}Q}{4}\right)\vec{i} + \left(q+\frac{\sqrt{2}}{4}Q\right)\vec{j}\right) = \vec{0}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{a^2} \neq 0 \Rightarrow \left(q+\frac{\sqrt{2}Q}{4}\right)(\vec{i}+\vec{j}) = \vec{0}$$

et $\vec{i}+\vec{j} \neq \vec{0} \Rightarrow q + \frac{\sqrt{2}}{4}Q = 0$

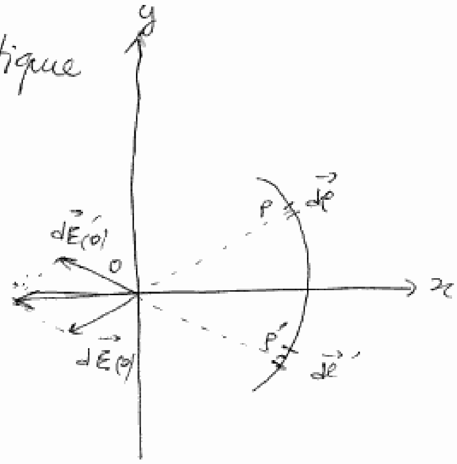
finalement $Q = -\frac{4}{\sqrt{2}}q \Rightarrow \boxed{Q = -2\sqrt{2}\,q}$

Exercice 2 :

1/ le champ électrique $\vec{E}$ au point O

par raison de symétrie le champ électrostatique Créé par l'arc est porté par l'axe ox.

En effet, deux élément de charges dq de longueur dl centré en P et P' symétriques par rapport à (ox), créent en O deux champs élémentaires $d\vec{E}(0)$ et $d\vec{E}'(0)$ dont la résultante est portée par l'axe ox



il en est de même pour toutes les autres paires d'élément de de charges de la distribution. Ainsi le champ total est porté par l'axe ox.

donc $d\vec{E}(0) = -dE\cos\theta\,\vec{i}$

avec $dE(0) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r^2}$ avec $dq = \lambda\,dl$

or $dl = r\,d\theta$

$tg\,d\theta \simeq d\theta = \frac{dl}{r}$

$\Rightarrow dl = r\,d\theta$

$tg\,\theta \simeq d\theta$ (pour les petite angle)

il vient $E(\theta) = \int_{arc} dE(0)$

$E_x(0) = \int_{arc} \frac{\lambda \cancel{r}\,d\theta}{4\pi\varepsilon r^{\cancel{2}}}\cos\theta$

$= \int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}} \frac{\lambda\,d\theta}{4\pi\varepsilon r}\cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon r}\int_{-\frac{\phi}{2}}^{\frac{\phi}{2}}\cos\theta\,d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon r}\left[\sin\theta\right]_{-\phi/2}^{\phi/2}$

$\Rightarrow E(0) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon r}\left[\sin\frac{\phi}{2} - \sin\left(-\frac{\phi}{2}\right)\right]$ $\left\{\begin{array}{l}\sin\left(-\frac{\phi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)\\ \sin \text{ est impaire}\end{array}\right.$

$E(0) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon r}2\sin\frac{\phi}{2}$

$\Rightarrow \vec{E}(0) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\sin\frac{\phi}{2}\,\vec{i}$

2) * pour $\phi = 0$ on a $\vec{E}(0) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon r}\sin(0)\,\vec{i}$

$\Rightarrow \vec{E}(0) = \vec{0}$

* pour $\phi = \pi$ on a $\sin(\pi) = -1$

$\Rightarrow \vec{E}(0) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\,\vec{i}$

* pour $\phi = 2\pi$ on a $\sin(2\pi) = 0$

$\Rightarrow \vec{E}(0) = \vec{0}$

Exercice 3:

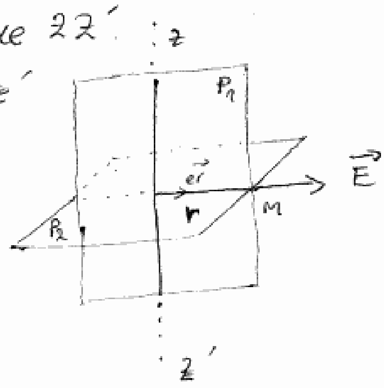
1/ Détermination de $\vec{E}$ en un point M de l'espace.

* la direction et le sens de $\vec{E}$

le fil admet une symetrie cylindrique

donc en peut ecrire : $\vec{E} = E_r(r,\theta,z)\,\vec{e_r} + E_\theta(r,\theta,z)\,\vec{e_\theta} + E_z(r,\theta,z)\,\vec{e_z}$

la distribution admet comme plans de symétrie un plan P_1 passant par M et contenant l'axe zz' et un autre plan P_2 perpendiculaire à l'axe zz' :



en déduit alors que le champ $\vec{E}$ est porté par l'intersection de ces plan c'est a dir l'axe de direction $\vec{e_r}$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\,\vec{e_r}$$

* la distribution est invariante par tout rotation autour du fil et par translation paralèle au fil, le champ ne peuvent donc dépendre des coordonnées θ et z, $\vec{E}(M) = E_r(r)\,\vec{e_r}$

➤ choix de la surface de Gauss.

le champ $\vec{E}(M)$ est radial et constant sur un cylindre d'axe zz', La surface de Gauss convenable sera un cylindre de rayon r et de hauteur h.

le théorème de Gauss :

$$\phi = \oiint_{S_g} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

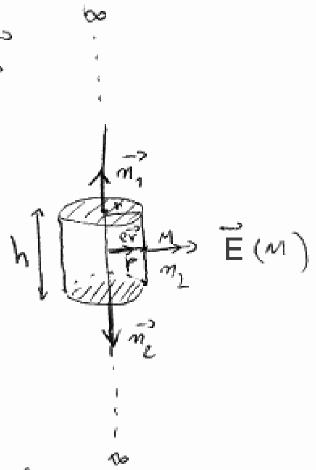
S_g : surface de Gauss

ϕ : le flux de $\vec{E}$ à travers S_g

$S_g = S_{b_1} + S_{b_2} + S_L$; S_{b_1} et S_{b_2} les bases.

S_L : surface latéral

$$\phi = \oint_{S_g} \vec{E}.\vec{dS} = \oiint \iint_{S_{b_1}} \vec{E}.\vec{dS} + \iint_{S_{b_2}} \vec{E}.\vec{dS} + \iint_{S_L} \vec{E}.\vec{dS}$$



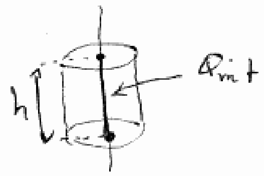
or $\vec{E} = E_r(r)\vec{er}$

$$\phi = \iint_{S_{b_1}} E_r(r)\, \cancel{\vec{er}.ds\,\vec{n_1}}^{\,0} + \iint_{S_{b_2}} E_r(r)\cancel{\vec{er}.ds.\vec{n_2}}^{\,0} + \iint_{S_L} \vec{E_r}(r)\,\vec{er}\,.\,ds\,.\vec{n_L}$$

or $n_1 = \vec{k}$; $n_2 = -\vec{k}$, $n_L = \vec{er}$ $\left| \begin{array}{l} \vec{er}.\vec{k} = 0 \\ \vec{er}.\vec{er} = 1 \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ $\phi = \iint_{S_L} E_r(r).ds$; le champ est constant sur un sylindre de rayon r et de l'axe zz'

$$\Rightarrow \phi = E_r(r)\iint_{S_L} ds = E_r(r).S_L = \underline{E_r(r) \times 2\pi r h}$$



$$Q_{int} = \int dq = \int \lambda dl = \lambda h$$

les charge sont sur le segment de longeur h

d'où $E_r(r) \times 2\pi r \cancel{h} = \dfrac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\,\frac{1}{r}$$

donc $\boxed{\vec{E}(M) = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\,\dfrac{1}{r}\,\vec{er}}$

- le potentiel en un point M de l'espace.

on a $\vec{E}(M) = -\vec{grad}\,V(M) = -\dfrac{dV(M)}{dr}\vec{er} - \dfrac{1}{r}\dfrac{dV(M)}{d\theta}\vec{e\theta} - \dfrac{dV(M)}{dz}.\vec{k}$

puisque $\vec{E}(M)$ ne dépend que de r on a alors

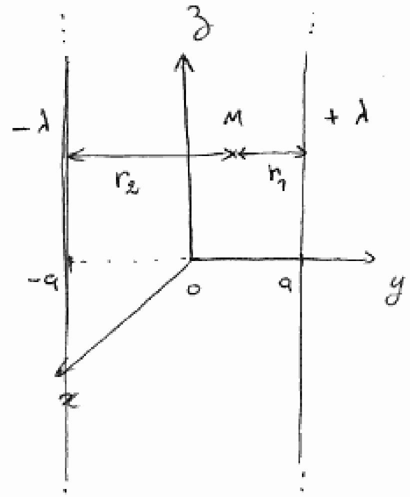
$$E_r(r)\cancel{\vec{er}} = -\frac{dV(M)}{dr}\,.\cancel{\vec{er}}$$

$$\Rightarrow dV(M) = -E_r(r).dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\,\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow V(M) = \int dV(M) = \int -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\,\frac{1}{r}\,dr = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int\frac{dr}{r}$$

$$\Rightarrow V(M) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\,\ln(r) + cte.$$

5



2) l'expression du potentiel au point M.

on a $V(M) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln(r) + cte$

on choisit l'origine des potentiels au point o

donc $V(0) = 0 \Rightarrow cte = 0$

le potentiel au point M est :

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M)$$

$V_1(M) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln(r_1)$ le potentiel électrique crée en M par une distribution $(+\lambda)$

$V_2(M) = \frac{-(-\lambda)}{2\pi\varepsilon} \ln(r_2)$: le potentiel électrique crée en un point M par une distribution $(-\lambda)$

d'où $V(M) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln(r_1) + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln(r_2)$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\left(\ln(r_2) - \ln(r_1)\right) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

3/ l'equation de la surface équipotentielle.

$\Rightarrow V(M) = cst = V_0$

$\Rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = V_0 \Rightarrow \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{2\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}$

$\Rightarrow \frac{r_2}{r_2} = e^{\frac{2\pi\varepsilon V_0}{\lambda}} = k$

l'équation de la surface équipotentielle est :

$$\boxed{\frac{r_2}{r_1} = k}$$

Exercice IV

1/ direction, sens et module du champ électrique :

La distribution de charge admet une symétrie sphérique

donc $\vec{E}(r) = E(r)\,\vec{e_r}$

on a $V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a}}$; a et q sont des constantes positives.

$$\vec{E}(r) = -\vec{grad}\, V(r)$$

$$E(r)\vec{e_r} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\vec{e_r} - \frac{1}{r}\frac{\partial V(r)}{\partial \theta}\vec{e_\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V(r)}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}$$

le champ ne dépend que de r

$$\Rightarrow \quad E(r)\cancel{\vec{e_r}} = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}\cancel{\vec{e_r}}$$

$(f+g)' = f'g + f.g'$

$$E(r) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon r} e^{-\frac{r}{a}}\right)$$

$$= -\frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\cdot e^{-\frac{r}{a}}\right)$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon}\left[-\frac{1}{r^2}e^{-r/a} + \frac{1}{r}\times\left(\frac{-1}{a}\right)e^{-r/a}\right]$$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon} e^{-r/a}\left(\frac{-1}{r^2} - \frac{1}{ra}\right)$$

$$\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon r} e^{-r/a}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{a}\right)\vec{e_r}$$

2) le flux $\phi(r)$ du champ électrostatique $\vec{E}(r)$ à travers une sphère de centre O et de rayon r

on a $\phi(r) = \oint_{sphère} \vec{E}(r).\vec{ds}$ avec $\vec{ds} = ds\,\vec{e_r}$
$= r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$

$$\Rightarrow \phi(r) = \oint_{sphère} E(r)\,\vec{e_r}.\,ds.\vec{e_r} \qquad \Big|\ \vec{e_r}.\vec{e_r} = 1$$

$$\Rightarrow \phi(r) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}e^{-r/a}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi .$$

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{r}\, e^{-r/a}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi$$

or $\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos 0 = 1+1 = 2$

et $\int_0^{2\pi} d\varphi = [\varphi]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$

$$\Rightarrow \phi(r) = \frac{q}{\cancel{4\pi}\varepsilon}\frac{1}{r}\, e^{-r/a}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)\times\cancel{4\pi}$$

$$\phi(r) = \frac{q}{\varepsilon_0 r}\, e^{-r/a}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)$$

3/ les limites du flux du champ $\vec{E}$

on a $\phi(r) = \frac{q}{\varepsilon_0 r}\, e^{-r/a}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)$

$$\lim_{r\to+\infty}\phi(r) = \lim_{r\to+\infty}\frac{q}{\varepsilon_0 r}\, e^{-r/a}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)$$

or $\left.\begin{array}{l}\lim_{r\to+\infty} e^{\frac{-r}{a}} = 0 \\ \lim_{r\to+\infty}\frac{1}{r} = 0\end{array}\right\}$ donc $\lim_{r\to\infty}\phi(r) = 0$

$$* \lim_{r\to 0}\phi(r) = \lim_{r\to 0}\frac{q}{\varepsilon_0 r}\, e^{-r/a}\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{a}\right)$$

$$= \lim_{r\to 0}\left(\frac{q}{\varepsilon_0 r}\cdot\frac{1}{r}\, e^{-r/a} + \frac{q}{a\varepsilon r}\, e^{-r/a}\right)$$

or $\lim_{r\to 0}\frac{1}{r^2}e^{-r/a} = \lim_{r\to 0} e^{-r/a} = e^{-0} = 1$

$\lim_{r\to 0}\frac{1}{r}e^{-r/a} = \lim_{r\to 0} e^{-r/a} = e^{0} = 1$

d'ou $\lim_{r\to 0}\phi(r) = \frac{q}{\varepsilon_0}\left(1+\frac{1}{a}\right)$

UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE DES SCIENCES SEMLALIA
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
MARRAKECH

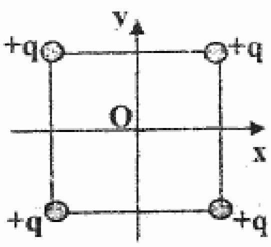
Année Universitaire 2006-07
Module de Physique 2
SMPC- SMA

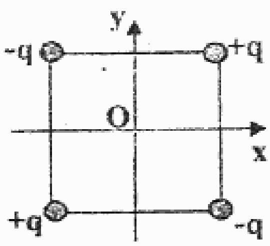
Premier Contrôle
ELECTRICITE 1 : durée 1 h30mn

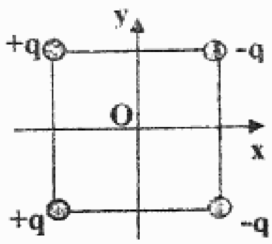
Question de cours :
Rappeler les propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique.

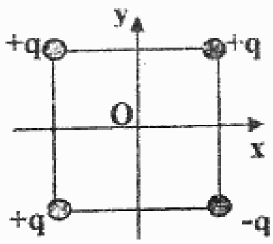
Exercice 1 : système de quatre charges ponctuelles.
Soient quatre charges ponctuelles disposées au sommet d'un carré dont la longueur de la diagonale est **2 a** .

Déterminer le champ $\vec{E}$ et le potentiel V électrostatiques au centre O (0,0) du carré dans les cas suivants :

cas 1


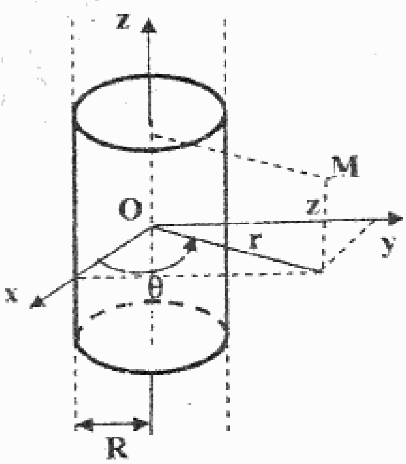
cas 2


cas 3


cas 4


Représenter $\vec{E}(O)$ dans chacun de ces cas.

Exercice 2 : Distribution cylindrique de charges.
On considère un cylindre de rayon *R*, de longueur infinie, chargé uniformément en surface par une densité surfacique de charges σ (σ > 0). A l'aide du théorème de Gauss, on désire déterminer le champ électrostatique $\vec{E}$ en tout point M de l'espace, créé par cette distribution. M est un point situé à la distance r de l'axe (Oz) du cylindre et repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) *(voir figure)* .



1° - Par des considérations de symétrie et d'invariances, déterminer la direction de $\vec{E}(M)$ et les variables dont il dépend.

2° - a - Définir précisément la surface de Gauss que vous utilisez (en justifiant votre choix).

b - Déterminer le champ $\vec{E}(M)$ en tout point *M* de l'espace (r < R et r > R).

3° - En déduire le potentiel V(M) pour tous les points M de l'espace (r < R et r > R) (On prendra comme origine des potentiels $V = V_0$ en $r = 0$)

4° - Tracer les courbes de variations E(r) *et* V(r) en fonction de r (où *E(r)* est la norme du champ). Conclure.

5° - Quelles sont les lignes de champ et les surfaces équipotentielles pour cette distribution de charges?

contrôle N° 1 2006/2007
ELECTRICITE corrigé SMPC/SMA

Question de cours

Les propriétés d'un conducteur en équilibre électrostatique sont :

- le champ électrique est nul à l'interieur d'un conducteur en équilibre ; $\vec{E}_{int} = \vec{0}$
- La densité volumique de charges à l'interieur du conducteur est nul ; $\rho = 0$
- le potentiel est constant en tout point du conducteur $V = cst$.

Exercice 1 :

Détermination de $\vec{E}$ et V au centre $O(0,0)$ dans les cas suivants :

a- 1er cas :

Soient $\vec{E}_A(0)$, $\vec{E}_B(0)$, $\vec{E}_C(0)$ et $\vec{E}_D(0)$ les champ crées en O respectivement par les charges $+q, +q, +q$ et $+q$

Los on a $\vec{E}_A(0) = \vec{E}_B(0)$ et $\vec{E}_C(0) = \vec{E}_D(0)$

Le champ résultant $\vec{E}(0)$ est donc

$$\vec{E}(0) = \vec{E}_A(0) + \vec{E}_B(0) + \vec{E}_C(0) + \vec{E}_D(0)$$
$$= \vec{E}_A(0) - \vec{E}_A(0) + \vec{E}_C(0) - \vec{E}_C(0)$$
$$\vec{E}(0) = 0$$

* Le potentiel $V(0)$: le potentiel électrostatique défini par : $V_A(0) = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{AO}$

on a $V(0) = V_A(0) + V_B(0) + V_C(0) + V_D(0)$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon a} + \frac{+q}{4\pi\varepsilon a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon a} = \frac{4q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

d'où $V(0) = \frac{q}{\pi\varepsilon a}$

b/ 2ème cas $(-q, +q, +q, -q)$

* Le champ $\vec{E}(O)$

Le champ $\vec{E}_A(O)$ par définition est:

$$\vec{E}_A(O) = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{u}_{AO}}{AO^2} \quad ; \ \vec{u}_{AO} : \text{vecteur unitaire de } AO$$

donc $\vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) + \vec{E}_C(O) + E_D(O)$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{u}_{AO}}{AO^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{u}_{BO}}{BO^2} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{u}_{CO}}{CO^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon} \frac{\vec{u}_{DO}}{DO^2}$$

avec : $\left| \begin{array}{l} \vec{u}_{AO} = -\vec{u}_{CO} \\ \vec{u}_{BO} = -\vec{u}_{DO} \end{array} \right. \quad ; \ AO = BO = CO = DO = a$

$$\vec{E}(O) = \frac{-q}{4\pi\varepsilon a^2} \vec{u}_{AO} - \frac{q}{4\pi\varepsilon a^2}(-\vec{u}_{AO}) + \frac{q}{4\pi\varepsilon a^2} \vec{u}_{BO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon a^2}(-\vec{u}_{BO})$$

$$= -\cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a^2}} \vec{u}_{AO} + \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a^2}} \vec{u}_{AO} + \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a^2}} \vec{u}_{BO} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a^2}} \vec{u}_{BO}$$

$$\vec{E}(O) = \vec{0}$$

* Le potentiel $V(O)$ au centre O

on a $V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O) + V_D(O)$

$$= \frac{-q}{4\pi\varepsilon AO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon BO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon CO} - \frac{q}{4\pi\varepsilon DO}$$

avec $AO = BO = CO = DO = a$

donc $V(O) = \cancel{\frac{-q}{4\pi\varepsilon a}} + \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a}} + \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a}} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a}}$

d'où $V(O) = 0$

c- 3ème cas $(+q, -q, -q, +q)$

* Le champ résultant $\vec{E}(O)$ est donc:

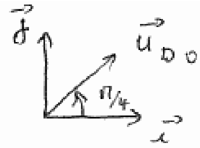
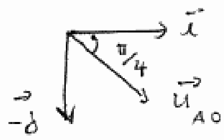
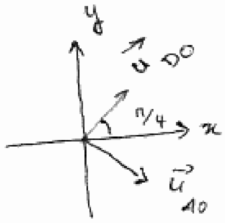
$$\vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) + \vec{E}_C(O) + \vec{E}_D(O)$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon a^2} \vec{u}_{AO} - \frac{q}{4\pi\varepsilon a^2} \vec{u}_{BO} - \frac{q}{4\pi\varepsilon a^2} \vec{u}_{CO} + \frac{q}{4\pi\varepsilon a^2} \vec{u}_{DO}$$

avec $\vec{u}_{AO} = -\vec{u}_{CO}$ et $\vec{u}_{BO} = -\vec{u}_{DO}$

$$\Rightarrow \vec{E}(O) = 2\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon a^2} \vec{u}_{AO}\right) + 2\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon a^2} \vec{u}_{DO}\right)$$

$$= \frac{q}{2\pi\varepsilon a^2} \left(\vec{u}_{AO} + \vec{u}_{DO}\right)$$

$\vec{u}_{DO} = \cos\frac{\pi}{4}\,\vec{i} + \sin\frac{\pi}{4}\,\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

$\vec{u}_{AO} = \cos\frac{\pi}{4}\,\vec{i} - \sin\frac{\pi}{4}\,\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}$

donc $\vec{u}_{AO} + \vec{u}_{DO} = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} - \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}}$

$= \cancel{2}\frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\vec{i} = \sqrt{2}\,\vec{i}$

d'où $\vec{E}(O) = \frac{\sqrt{2}\,q}{2\pi\varepsilon a^2}\,\vec{i}$

* potentiel $V(O)$ au centre O.

le potentiel résultant est : $V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O) + V_D(O)$

$V(O) = \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a}} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a}} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a}} + \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a}} = 0$

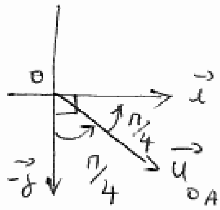
d/ 4ème cas : $(+q, +q, -q, +q)$

le champ résultant $\vec{E}(O)$ est : $\vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) + \vec{E}_C(O) + \vec{E}_A(D)$

$\Rightarrow \vec{E}(O) = \vec{E}_A(O) + \vec{E}_A(O) + \vec{E}_B(O) - \vec{E}_B(O)$ car $\left| \begin{array}{l} \vec{E}_A(O) = \vec{E}_C(O) \\ \vec{E}_B(O) = \vec{E}_D(O) \end{array} \right.$

$\Rightarrow \vec{E}(O) = 2\vec{E}_A(O) = 2 \times \frac{q}{4\pi\varepsilon a^2}\,\vec{u}_{AO}$

$\vec{u}_{AO} = \cos\frac{\pi}{4}\,\vec{i} - \sin\frac{\pi}{4}\,\vec{j} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{i} - \vec{j})$



$\Rightarrow \vec{E}(O) = \frac{\sqrt{2}\,q}{4\pi\varepsilon a^2}(\vec{i} - \vec{j})$

* le potentiel résultant $V(O)$ au centre O

$V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O) + V_D(O)$

$= \frac{q}{4\pi\varepsilon a} + \frac{q}{4\pi\varepsilon a} - \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a}} + \cancel{\frac{q}{4\pi\varepsilon a}}$

$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon a} \Rightarrow V(O) = \frac{q}{2\pi\varepsilon a}$

Exercice 2: Distribution cylindrique de charges.

1/ la direction et le sens du champ electrostatique $\vec{E}$

* La distribution admet comme plans de symetrie, un plan P_1 passant par M et contenant l'axe zz' et un autre plan P_2 perpendiculaire à l'axe zz'.

en déduit alors que le champ $\vec{E}$ est porté par L'intersection de ces plan, c'est a dir L'axe de direction $\vec{e_r}$

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\ \vec{e_r}$$

* La distribuction est invariante par toute translation selon l'axe zz'

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(r,z)\ \vec{e_r}$$

* La distribution est invariante par toute rotation autour de (zz')

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(M) = E_r(r)\ \vec{e_r}$$

2/ a. choix de la surface de gauss.

Le champ $\vec{E}(M)$ est radial et constant sur un cylindre d'axe zz' et de rayon r. La surface de Gauss convenable sera un cylindre de rayon r et de hauteur h.

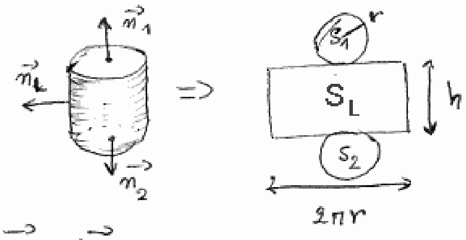
b/ Le champ $\vec{E}(M)$ en tout point M de l'espace.

le théoreme de Gauss:

$$\phi = \oiint_{S_g} \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$; ϕ : étant le flux de $\vec{E}$ à travers S_g

S_g : surface de Gauss.

$S_g = S_1 + S_2 + S_L$



$$\phi = \oiint_{S_g} \vec{E}.\vec{dS} = \iint_{S_1} \vec{E}.\vec{dS} + \iint_{S_2} \vec{E}.\vec{dS} + \iint_{S_L} \vec{E}.\vec{dS}$$

on a $\vec{E} = E_r(r)\,\vec{e_r}$

$$\phi = \iint_{S_1} E_r(r)\,\cancel{\vec{e_r}\cdot ds\,\vec{n_1}}^{\,0} + \iint_{S_2} E_r(r)\,\cancel{\vec{e_r}\cdot ds\,\vec{n_2}}^{\,0} + \iint_{S_L} E_r(r)\,\vec{e_r}\cdot ds\cdot\vec{n_L}$$

on a $\vec{n_1} = \vec{k}$, $\vec{n_2} = -\vec{k}$, $\vec{n_L} = \vec{e_r}$

$\vec{e_r}\cdot\vec{k} = 0$

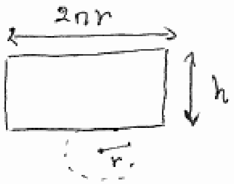
$\vec{e_r}\cdot\vec{e_r} = 1$

$\Rightarrow \phi = \iint_{S_L} E_r(r)\cdot ds$; le champ $\vec{E}$ est uniforme

Sur un sylindre de rayon r et de l'axe zz'

$$\Rightarrow \phi = \iint_{S_L} E_r(r)\,ds = E_r\iint_{S_L} ds = E_r(r)S_L = E_r(r)\cdot 2\pi r h$$

Surface du Sylindre est égale à $2\pi r h$

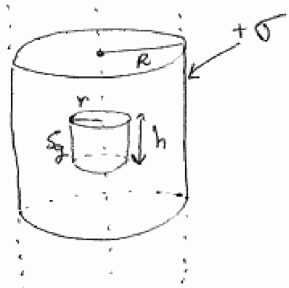


$\Rightarrow S = 2\pi r h$

$$\Rightarrow \boxed{\phi = E_r(r)\cdot 2\pi r h}$$

1er cas : $r < R$ (M à l'intérieur du cylindre)

pas de charges à l'interieur du Surface de Gauss (les charges sont au surface.



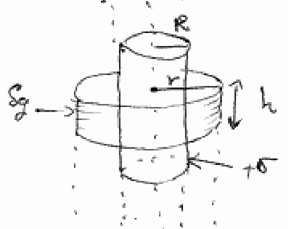
$\Rightarrow \underline{Q_{int} = 0}$

d'où $\quad E_r(r) = 0 \quad \Rightarrow \vec{E}(M) = \vec{0}$

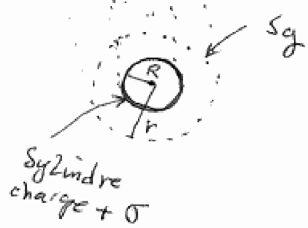
2ème cas : $r > R$ (M à l'exterieur du cylindre)

$$Q_{int} = \iint \sigma\,ds = \sigma S = \sigma \times 2\pi R h$$

les charge sont au surface de Sylindre de rayon R.



$$\text{d'où} \Rightarrow \phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_r(r)\,\cancel{2\pi}\, r\,\cancel{h} = \frac{\sigma\,\cancel{2\pi} R\,\cancel{h}}{\varepsilon_0}$$



$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon} \times \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e_r}$$

finalement
$$\begin{cases} 0 & \text{si } r < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon} \frac{1}{r} & \text{si } r > R \end{cases}$$

3/ Le potentiel en tout point M de l'espace

on a $\vec{E}(M) = -\vec{grad}\, V(M)$

le gradient en coordonnées cylindriques

est $\vec{grad}\, V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e_\theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \vec{k}$

Puisque $\vec{E}$ ne depend pas de θ et z on a alors

$$E_r(r)\,\cancel{\vec{e_r}} = -\frac{dV(M)}{dr}\,\cancel{\vec{e_r}}$$

$$\Rightarrow dV(M) = -E_r(r)\, dr$$

1er cas : $r < R$ on a $E_r(r) = 0 \Rightarrow dV(M) = 0$

$\Rightarrow V(M) = cste$ dans l'intervale $[0, R[$

d'après les condition au limite pour $r = 0 \Rightarrow V = V_0$

d'où $V(M) = V_0 \Rightarrow V_{int}(M) = V_0$ (à l'intérieur)

2ème cas : $r > R$, on a $\vec{E}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \frac{1}{r} \vec{e_r}$

et $\vec{E}(M) = -\vec{grad}\, V \Rightarrow E_r(r)\cdot\cancel{\vec{e_r}} = -\frac{dV(M)}{dr}\cancel{\vec{e_r}}$

$$dV = E_r(r)\, dr$$

$$\Rightarrow V_{ext} = \int dV = \int \frac{\sigma R}{\varepsilon} \frac{1}{r} dr = \frac{\sigma R}{\varepsilon} \int \frac{dr}{r} = \frac{\sigma R}{\varepsilon} \ln r + cste$$

pour déterminer la constante en utilisant la continuité du potentiel pour $r = R$

on a $V_{int}(r = R) = V_{ext}(r = R)$

$$V_0 = \frac{\sigma R}{\varepsilon} \ln R + cst \quad \Rightarrow cst_0 = V_0 - \frac{\sigma R}{\varepsilon} \ln R$$

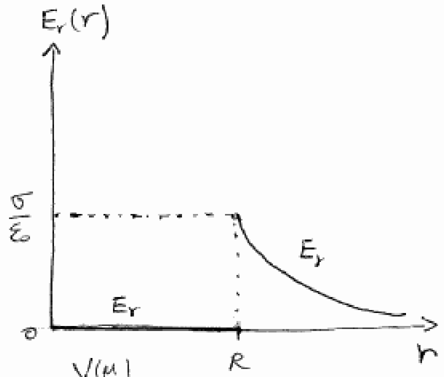
$$\Rightarrow V_{ext}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln r + V_0 - \frac{\sigma R}{\varepsilon} \ln R$$

6

d'où $V_{ext}(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon} \ln \frac{R}{r} + V_0$

4/ Représentation de $\vec{E}(M)$ et $\vec{V}(M)$ en fonction de r.

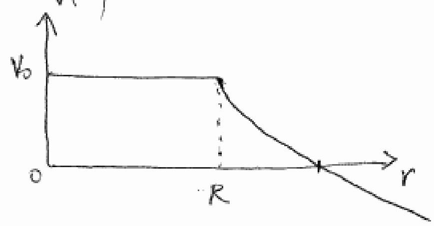
on a $\begin{cases} E_r(M) = 0 & \text{si } r < R \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon} \frac{1}{r} & \text{si } r > 0 \end{cases}$



pour $r = R \Rightarrow E(r = R) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$\lim_{+\infty} E_r(r) = \lim_{+\infty} \frac{\sigma R}{\varepsilon r} = 0$

on a $V(M) \begin{cases} V_0 & \text{si } r < o \\ \frac{\sigma R}{\varepsilon} \ln \frac{R}{r} + V_0 & \text{si } r > R \end{cases}$



pour $r = R \Rightarrow V(r = R) = V_0$

$\lim_{+\infty} V(M) = \lim_{+\infty} \left(\frac{\sigma R}{\varepsilon} \ln \frac{R}{r} + V_0 \right) = \lim_{+\infty} \ln\left(\frac{1}{\infty}\right) = \lim_{+\infty} \ln(0^-)$

$= -\infty$

5/ * lignes de champ : les ligne de champ sont des droites qui partent de la Surface du cylindre chargé, leur prolongement passent par l'origine.

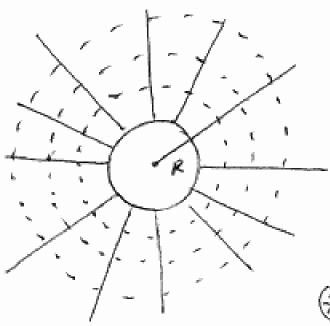
* Surface équipotentielles $\Rightarrow V(M) = cste$

$\Rightarrow$ a l'interieur $V(M) = cst = V_0$

à l'exterieur $V(M) = \frac{\sigma R}{\varepsilon} \ln \frac{R}{r} + V_0 = cst \Rightarrow \ln \frac{R}{r} = \frac{\varepsilon_0 cste - V_0}{\sigma R}$

$\Rightarrow -\ln r = \frac{\varepsilon\, cte - V_0}{\sigma R} - \ln R = cst' \Rightarrow r = -e^{cst'} = cste$

$\boxed{r = cste}$ $\Rightarrow$ les surfaces equipotentielles sont des cylindres de même axe que la distribution.



Surface équipotentiel →

Lignes de champ →

(7)

UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE DES SCIENCES SEMLALIA
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
MARRAKECH

Année Universitaire 2005-06
Module de Physique 2
SMPC- SMA

Premier Contrôle
ELECTRICITE 1 : durée 1 h30mn

Exercice 1

Sur un axe **x'Ox** sont placées : une charge ponctuelle q_1 au point **O**, une charge ponctuelle q_2 au point **A** d'abscisse **x = a (a>0)**.

1° - Donner l'expression de la force électrostatique agissante sur une charge ponctuelle q_3 placée sur l'axe au point **B** d'abscisse **x = a/2.**

On donne : $q_1 = +3q$, $q_2 = -2q$ et $q_3 = +q$ avec $q>0$.

2° - Donner les expressions du champ et du potentiel électrostatiques crées par q_1 et q_2 au point **B**.

Exercice 2

A – On considère une spire circulaire de centre **O** et de rayon **R**, uniformément chargée avec une densité de charges linéique λ ($\lambda>0$).

1° - Sans faire de calcul, donner la direction du champ électrique $\vec{E}_s$ en un point **M** de l'axe de la spire tel que OM = x. Justifier votre réponse.

2° - Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}_S(M)$ et le potentiel $V_S(M)$ au point **M**

B – Soit un fil infini uniformément chargé avec une densité de charges linéique $-\lambda$.

1° - En utilisant la symétrie de la distribution, quelle est la direction du champ électrique $\vec{E}_f(M)$ en un point **M** situé à une distance **r** du fil . Justifier votre réponse

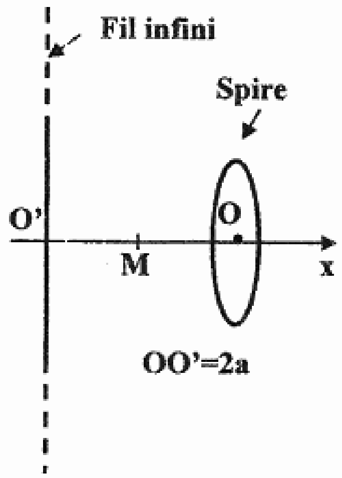
2° - Par application du théorème de Gauss, déterminer le champ électrique $\vec{E}_f(M)$ en un point **M.** En déduire le potentiel $V_f(M)$. On donne $V_f(r=1) = 0$

3° - Sans faire de calcul, donner la forme des lignes de champ et celle des surfaces équipotentielles

C - On place le fil infini perpendiculairement à l'axe principal de la spire circulaire et à une distance **2a** de celle-ci (voir figure).

1° - Déterminer le champ $\vec{E}$ crée par le fil infini et la spire circulaire au point **M** tel que **M** est le mileu de **O'O**.

2° - Déterminer le potentiel **V(M)**.

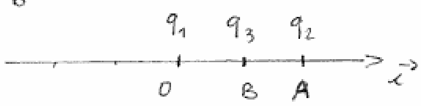


Contrôle N°1 2005/2006
Electricité SMPC/SMA

Exercice 1 :

1/ l'expression de la force électrostatique $\vec{F}_B$

on a $\vec{F}_B = \vec{F}_{q_1q_3} + \vec{F}_{q_2q_3}$



on a $\vec{F}_{q_1q_3} = \frac{q_1q_3}{4\pi\varepsilon}\frac{\vec{OB}}{OB^3} = \frac{q_1q_3\,\frac{a}{2}}{4\pi\varepsilon\left(\frac{a}{2}\right)^3}\vec{i} = \frac{q_1q_3}{\cancel{4}\pi\varepsilon\,\frac{a^2}{\cancel{4}}}\vec{i}$

avec $q_1 = 3q$ et $q_3 = q$

$\Rightarrow \vec{F}_{q_1q_3} = \frac{3q^2}{\cancel{4}\pi\varepsilon\, a^2}\vec{i}$

* $\vec{F}_{q_2q_3} = \frac{q_2q_3}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{AB}}{AB^3} = \frac{q_2q_3\,\frac{a}{2}}{4\pi\varepsilon\left(\frac{a}{2}\right)^3}\vec{i} = \frac{q_2q_3}{\cancel{4}\pi\varepsilon\,\frac{a^2}{\cancel{4}}}\vec{i}$

avec $q_2 = -2q$ et $q_3 = q$.

$\Rightarrow \vec{F}_{q_2q_1} = \frac{-2q^2}{\pi\varepsilon\, a^2}\vec{i}$

donc $\vec{F}_B = \frac{3q^2}{\pi\varepsilon\, a^2}\vec{i} - \frac{2q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{i} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon a^2}(3-2)\vec{i} = \frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{i}$

2/ l'expressions du champ et du potentiel.

* pour le champ.

on a $\vec{F}_B = q_B\vec{E}_B = q_3\vec{E}_B \Rightarrow \vec{E}_B = \frac{\vec{F}_B}{q_3}$

$\Rightarrow \vec{E}_B = \frac{q^2}{q\cdot\pi\varepsilon\, a^2}\vec{i}$, avec $q_3 = q$

$\Rightarrow \vec{E}_B = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{i}$

* pour le potentiel. V_B

on a $V_B = V_1 + V_2$

avec $V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\, OB}$ et $V_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\, AB}$

(1)

or $q_1 = 3q$, $q_2 = -2q$, $OB = \frac{a}{2}$ et $AB = \frac{a}{2}$

d'où $V_B = \dfrac{3q}{4\pi\varepsilon\left(\frac{a}{2}\right)} - \dfrac{2q}{4\pi\varepsilon\left(\frac{a}{2}\right)} = \dfrac{3q}{2\pi\varepsilon_0 a} - \dfrac{2q}{2\pi\varepsilon_0 a}$

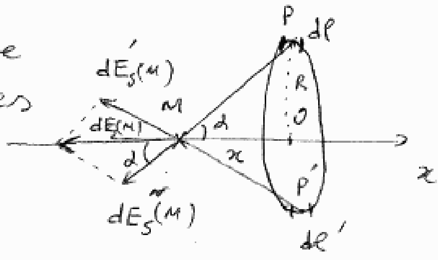
$V_B = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}(3-2) = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 a}$

Exercice 2:

A. 1. la direction du champ électrique $\vec{E}_S$ en M.

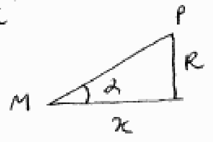
par raison de symétrie le champ électrostatique créé par la spire est porté par l'axe ox.

En effet, deux élément de charges dq de longueur dl centré en P et P' symétriques par rapport à (OX), créent en M deux champs élémentaires $d\vec{E}_S(M)$ et $d\vec{E}'_S(M)$ dont la résultante est portée par l'axe ox.



2- le champ électrostatique $\vec{E}_S(M)$

$d\vec{E}_S = -dE\cos\alpha\,\vec{i} = -\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon}\dfrac{\cos\alpha}{PM^2}\vec{i}$



or $dq = \lambda\, dl$ et $\cos\alpha = \dfrac{x}{PM}$

$PM^2 = x^2 + R^2 \Rightarrow PM = \sqrt{x^2+R^2}$

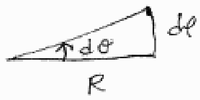
$\Rightarrow d\vec{E}_S = \dfrac{-\lambda\, dl\cos\alpha}{4\pi\varepsilon(x^2+R^2)}\vec{i} = \dfrac{-\lambda dl\, x\,\vec{i}}{4\pi\varepsilon\,(x^2+R^2)\sqrt{x^2+R^2}}$

$d\vec{E}_S = \dfrac{-x\lambda R\,d\theta}{4\pi\varepsilon(x^2+R^2)^{3/2}}\,\vec{i}$

$\left((x^2+R^2)\sqrt{x^2+R^2} = (x^2+R^2)^1(x^2+R^2)^{1/2} = (x^2+R^2)^{1+\frac{1}{2}} = (x^2+R^2)^{3/2} \right)$

$\Rightarrow \vec{E}_S = \int d\vec{E}_S = \int_0^{2\pi}\dfrac{-\lambda R x\,d\theta}{4\pi\varepsilon_0(x^2+R^2)^{3/2}}\vec{i}$

$= \dfrac{-\lambda R x}{4\pi\varepsilon(x^2+R^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta\ \vec{i}$



$$* \int_0^{2\pi} d\theta = [\theta]_0^{2\pi} = 2\pi - 0 = 2\pi$$

d'où $\vec{E_s} = \dfrac{-\lambda R x \times 2\pi}{4\pi\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}} \vec{i} = \dfrac{-\lambda R x}{2\varepsilon_0 (x^2+R^2)^{3/2}} \vec{i}$

* le potentiel $V_s(M)$ au point M

on a $dV_s(M) = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 PM}$

avec $dq = \lambda dl$, $PM = \sqrt{x^2+R^2}$ et $dl = R\, d\theta$

$$\Rightarrow dV_s(M) = \frac{\lambda R\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}}$$

$$\Rightarrow V_s(M) = \int dV_s(M) = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}} = \frac{\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}} \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow V_s(M) = \frac{2\pi\lambda R}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}} = \frac{\lambda R}{2\varepsilon_0 \sqrt{x^2+R^2}}$$

B - fil infini

1 - la direction du champ électrostatique $\vec{E_f}(M)$

La distribution admet comme plan de symétrie un plan P_1 passant par M et contenant l'axe (yy') et un autre plan P_2 perpendiculaire à l'axe (yy'), on déduit alors que le champ $\vec{E_f}(M)$ est porté par l'axe de direction $\vec{er}$

* le système est invariant par rotation autour du fil,

* le système est invariant par translation parallèle au fil le champ ne dépend que la distance du point M au fil.

$$\vec{E_f}(M) = E_f(r)\, \vec{er}.$$

2/ application du théorème de Gauss

$$* \phi = \oiint_{S_g} \vec{E_f}(M) \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

* Surface de gauss :

le champ est radial et constant sur un cylindre,
La Surface de Gauss convenable Sera un cylindre de rayon r et de hauteur h.

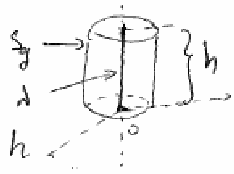
$$\phi = \oiint_{S_g} \vec{E}_f(M)\cdot d\vec{S} = \iint_{S_{b_1}} \vec{E}_f(M)\cdot d\vec{S}_{sb_1} + \iint_{S_{b_2}} \vec{E}_f(M)\cdot d\vec{S}_{b_2} + \iint_{S_L} \vec{E}_f(M)\cdot d\vec{S}_L$$

$0 \quad \vec{e_r}\perp\vec{k} \qquad\qquad 0 \quad \vec{e_r}\perp\vec{k}$

$$= \iint_{S_{b_1}} \cancel{E_f(r)\,\vec{e_r}\cdot dS_{b_1}\vec{k}} + \iint_{S_{b_2}} \cancel{E_f(r)\,\vec{e_r}\cdot dS_{b_2}(-\vec{k})} + \iint_{S_L} E_f(r)\,\vec{e_r}\, dS_L\,\vec{e_r}$$

le champ est constant sur un cylindre

$$\phi = \iint_{S_L} E_f(r)\, dS_L = E_f(r)\, S_L = E_f(r)\, 2\pi r h$$



* $Q_{int} = \int -\lambda\, dl = -\lambda \int_0^h dl = -\lambda h$

les charge sont sur le segment de longeur h.

d'où $\quad E_f(r)\, 2\pi r \cancel{h} = -\dfrac{\lambda \cancel{h}}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E_f(r) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \Rightarrow \vec{E}_f(M) = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\vec{e_r}.$$

* le potentiel $V_f(M)$.

on a $\quad \vec{E}_f(M) = -\vec{grad}\, V_f(M)$

$$E_f(r)\,\cancel{\vec{e_r}} = -\frac{dV_f(M)}{dr}\cancel{\vec{e_r}}$$

$$dV_f(M) = -E_f(r)\, dr$$

$$= +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\, dr$$

$$\Rightarrow \quad V_f(M) = \int dV_f(M) = +\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r) + cst$$

on a $\quad V_f(r=1) = 0 = +\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(1) + cst = 0 + cst$

$$\Rightarrow cst = 0$$

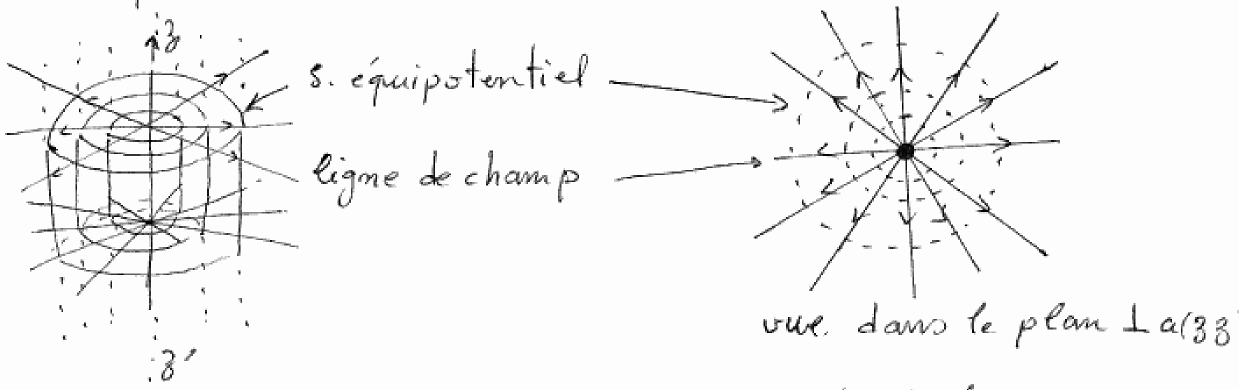
finalement $\quad V_f(M) = +\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln(r)$

3/ Lignes de champ

$\vec{E}$ est perpendiculaire à l'axe du fil $\Rightarrow$ les lignes de champ sont des droites qui partent de la fil chargé

* surface équipotentielles.

les surfaces équipotentiel sont des cylindre de même axe que la distribution.



Les lignes de champ et les surface équipotentielles sont orthogonales.

c/ 1- le champ $\vec{E}$

on a $\vec{E} = \vec{E_s}(M) + \vec{E_f}(M)$, avec $\begin{cases} r = a \\ x = a \end{cases}$

$$= \frac{-\lambda R a}{2\varepsilon(a+R^2)^{3/2}}\vec{i} + \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon}\frac{1}{a}\vec{er}$$

dans ce cas $\vec{i}$ est confondu avec $\vec{er}$ $\Rightarrow \vec{i} = \vec{er}$

$$\vec{E} = \frac{-\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{Ra}{(a^2+R^2)^{3/2}} + \frac{1}{\pi a}\right)\vec{i}$$

2/ le potentiel V(M)

on a $V(M) = V_s(M) + V_f(M)$

$$= \frac{\lambda R}{2\varepsilon\sqrt{a^2+R^2}} + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon}\ln(a)$$

$$= \frac{\lambda}{2\varepsilon_0}\left(\frac{R}{\sqrt{a^2+R^2}} + \frac{\ln(a)}{\pi}\right)$$

en remplace x par a et r par a

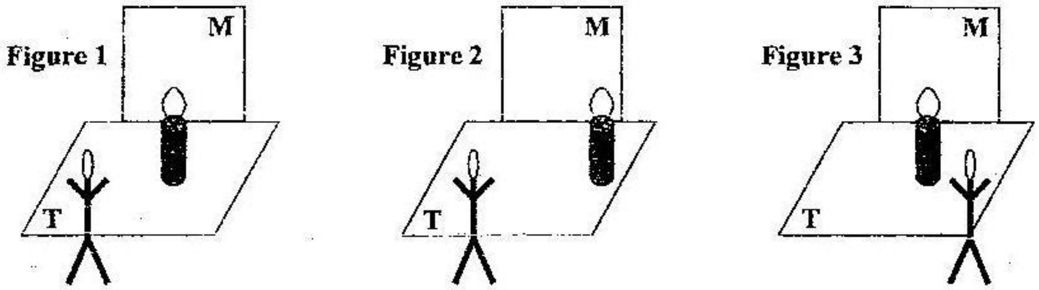
Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique
Marrakech

25 avril 2005

Filières SMP, SMC et SMA - Semestre II
Epreuve du ½ module d'Optique (Durée 1.5 H)

Questions de cours

Pour les 3 figures ci-dessous, on place une bougie sur une table T devant un miroir plan M. Un observateur est placé de l'autre coté de la table de façon à permettre l'observation de l'image de la bougie à travers le miroir M. Choisir une seule réponse (**a**, **b**, **c** ou **d**) aux questions proposées.



1) Sur la figure 1, l'image de la bougie à travers le miroir M se trouve localisée :

(a) devant le miroir
(b) derrière le miroir
(c) sur la surface du miroir
(d) pas d'image

2) Sur la figure 1, la taille de l'image de la bougie à travers le miroir M est :

(a) plus grande que la bougie
(b) la même
(c) plus petite que la bougie
(d) pas d'image

3) Sur la figure 2, la position de la bougie est déplacée vers la droite. L'image de la bougie vue par l'observateur se trouve localisée :

(a) à gauche de la position précédente
(b) à droite de la position précédente
(c) à la même position
(d) pas d'image

4) Sur la figure 3, l'observateur s'est déplacé vers la droite par rapport à la figure 1. La bougie est restée à la même position que dans la figure 1. L'image de la bougie vue par l'observateur se trouve localisée :

(a) à droite de la position obtenue sur la figure 1
(b) à la même position que celle obtenue sur la figure 1
(c) à gauche de la position obtenue sur la figure 1
(d) pas d'image

Exercice I

On s'intéresse à la propagation du rayon lumineux qui se dirige de la gauche vers la droite entre deux milieux homogènes et transparents (voir les figures de 1 à 4 ci-dessous). Les deux milieux sont caractérisés par des indices de réfraction n_1 et n_2.

En justifiant votre réponse et en s'appuyant sur les lois de Descartes, répondre aux questions suivantes (de 1 à 4) par une seule réponse parmi les propositions suivantes (de A à F).

A : seulement si $n_2 > n_1$
B : seulement si $n_2 = n_1$
C : seulement si $n_2 < n_1$
D : serait possible avec A ou C
E : jamais possible
F : toujours possible quelques soit n_1 et n_2

1. Pour quelle condition (A à F) les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 1 ?
2. Pour quelle condition (A à F) les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 2 ?
3. Pour quelle condition (A à F) les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 3 ?
4. Pour quelle condition (A à F) les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 4 ?

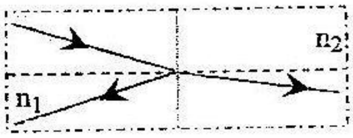
fig.1


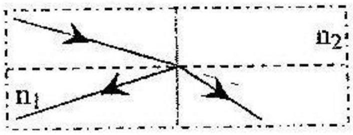
fig.2


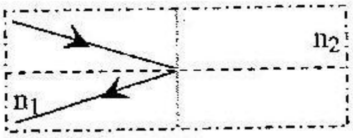
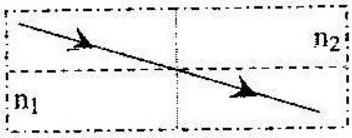
fig.3


fig.4


Exercice II

On considère 2 miroirs sphériques M_1 (concave) et M_2 (convexe) comme représentés respectivement sur les figures 1 et 2 (voir feuille jointe à cette épreuve). Ces deux miroirs sont utilisés dans les conditions d'approximation de Gauss et ayant chacun un centre C, un sommet S et un rayon R= 4cm. Soit un objet réel AB placé à 1cm du sommet S de M_1 et de M_2.

1) Donner la relation de conjugaison des miroirs sphériques avec origine au sommet dans les conditions d'approximation de Gauss.

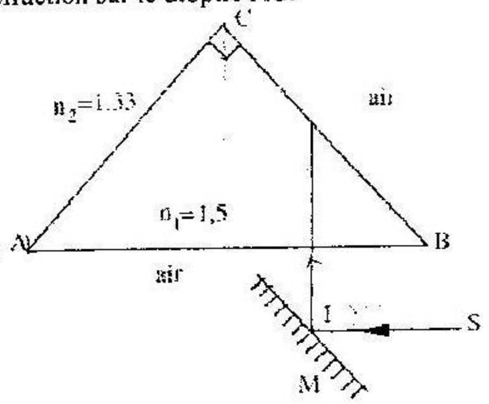
2) Construire géométriquement l'image A'B' de AB à travers M_1 et à travers M_2 (Utiliser les deux graphes sur la feuille jointe). En déduire la nature de l'image obtenue pour chaque miroir.

3) Utiliser la relation de conjugaison pour déterminer la position de l'image $\overline{SA'}$ à travers le miroir M_1. En déduire le grandissement linéaire Γ.

Exercice III

On considère trois dioptres plans AB, AC et BC formant un triangle isocèle. Les dioptres AC et BC forment un angle droit au point C. Le dioptre AC sépare deux milieux d'indices n_1 et n_2. Les dioptres AB et BC séparent le milieu d'indice n_1 et l'air. On place un miroir plan M parallèle au dioptre BC puis on envoie un rayon lumineux SI qui arrive sur le miroir M avec un angle d'incidence de 45° (voir figure).On donne : n_1=1,5 et n_2=1,33.

1. Compléter, en justifiant votre réponse, la marche du rayon lumineux SI
2. Calculer l'angle de réfraction sur le dioptre AC.



Filières SMP, SMC et SMA - Semestre II (25 avril 2005)
Corrigé de l'épreuve du ½ module d'Optique

Questions de cours

1. Réponse **(b)** *(1pt)*
2. Réponse **(b)** *(1pt)*
3. Réponse **(b)** *(1pt)*
4. Réponse **(b)** *(1pt)*

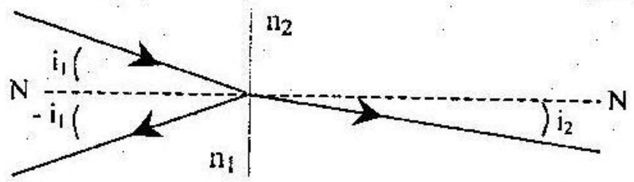
Exercice I

1. Les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 1 si nous avons la condition **(A)** c.à.d : $n_2 > n_1$

Justification *(0.5 pt)*

fig.1

(0.5 pt)



- Pour le rayon réfracté :

Descartes : $n_1.\sin i_1 = n_2.\sin i_2$ or $n_2 > n_1$ implique $\sin i_1 / \sin i_2 = n_2 / n_1 > 1$

$\sin i_1 > \sin i_2$

$i_1 > i_2$

L'angle de réfraction i_2 est plus petit que l'angle d'incidence i_1

Le rayon réfracté s'approche la normale (milieu 2 est plus réfringent)

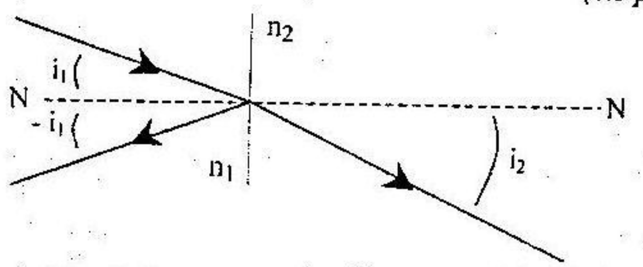
- Pour le rayon réfléchi il fait un angle - i_1 par rapport à la normale N

2. Les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 2 si nous avons la condition **(C)** c.à.d : $n_1 > n_2$

Justification *(0.5 pt)*

fig.2

(0.5 pt)



- Pour le rayon réfracté :

Descartes : $n_1.\sin i_1 = n_2.\sin i_2$ or $n_1 > n_2$ implique $\sin i_1 / \sin i_2 = n_2 / n_1 < 1$

$\sin i_1 < \sin i_2$

$i_1 < i_2$

L'angle de réfraction i_2 est plus grand que l'angle d'incidence i_1

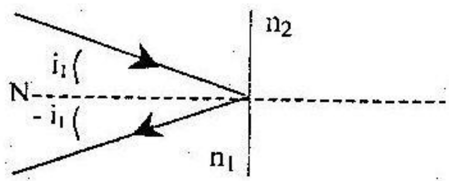
Le rayon réfracté s'éloigne de la normale (milieu 2 est moins réfringent)

- Pour le rayon réfléchi il fait un angle - i_1 par rapport à la normale N

3. Les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 3 si nous avons la condition **(D)**

Justification *(0.5 pt)*

fig.2



(0.5 pt)

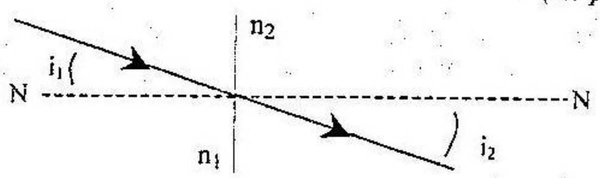
Cette figure serait possible si $n_1 > n_2$. Dans ce cas nous pouvons avoir une réflexion totale avec un certain angle d'incidence.

4. Les rayons lumineux peuvent être comme sur la figure 4 si nous avons la condition **(B)** c.à.d : $n_1 = n_2$

Justification *(0.5 pt)*

fig.4

(0.5 pt)



- Pour le rayon réfracté :

Descartes : $n_1.\sin i_1 = n_2.\sin i_2$ or $i_1 = i_2$ implique $\sin i_1 / \sin i_2 = n_2 / n_1 = 1$

$n_1 = n_2$

L'angle de réfraction i_2 est égal à l'angle d'incidence i_1

- Nous n'avons pas de réflexion (cela dépend du milieu).

Exercice II

1. Relation de conjugaison des miroirs sphériques (origine au sommet et dans les conditions d'approximation de Gauss) :

$$1/\overline{SA} + 1/\overline{SA'} = 2/\overline{SC}$$ *(1 pt)*

2. Voir graphes (Placer les foyers et construire A'B' pour les deux miroirs). *(2 pts)*

Les images obtenues à travers M1 et M2 sont :

- Pour M1 l'image est Virtuelle, droite et plus grande que l'objet. *(0.5 pt)*
- Pour M2 l'image est virtuelle, droite et plus petite que l'objet. *(0.5 pt)*

3. A partir de :

$1/\overline{SA} + 1/\overline{SA'} = 2/\overline{SC}$ nous aurons $\overline{SA'} = [\overline{SC}.\overline{SA}] / [2\overline{SA} - \overline{SC}] = +2$ cm *(1 pt)*

Le grandissement $\Gamma = -\overline{SA'}/\overline{SA} = +2$ *(1 pt)*

Exercice 3 :

1/ <u>au point I</u> :

Le rayon incident SI est réfléchit par le miroir M. L'angle de réflexion est opposé à i_1 est égale à 45°.

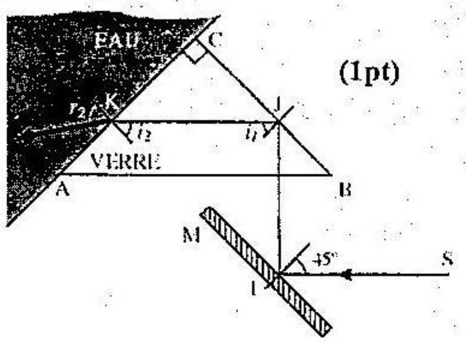
Le rayon réfléchit arrive perpendiculaire au dioptre AB donc il ne subit pas de déviation et arrive sur le dioptre BC sous une incidence i_2 égale à 45° (les normales à M et à BC sont //). **(1pt)**

<u>au point J</u> :

D'après la loi de réfraction on a : $n_1\sin 45 = 1\sin r_1$; soit $\sin r_1 = 1{,}06$ ce qui est impossible. **(1pt)**

donc il va y avoir une réflexion totale sur le dioptre BC. L'angle de réflexion totale est :

$l = \text{Arc}\sin(1/n_1) = 41{,}81°$ (1pt)



(1pt)

Le rayon réfléchit arrive sur le dioptre AC sous une incidence i_2 est égale à 45° (la normale au point J au dioptre BC et le dioptre AC sont //) **(1pt)**

<u>au point K</u> :

2/ D'après la loi de réfraction on a : $n_1\sin 45 = n_2 \sin r_2$; soit **$r_2 = 52{,}89°$**

(1pt)

Epreuve d'Optique – Filières SMP, SMC et SMA

Avril 2005

Graphes pour la construction géométrique / Exercice II

Nom :……………………………………………………………………………

Prénom :…………………………………………………………………………

N° d'examen :……………………………………………………………………

(N.B. Cette feuille est à joindre impérativement à votre copie d'examen)

Figure 1

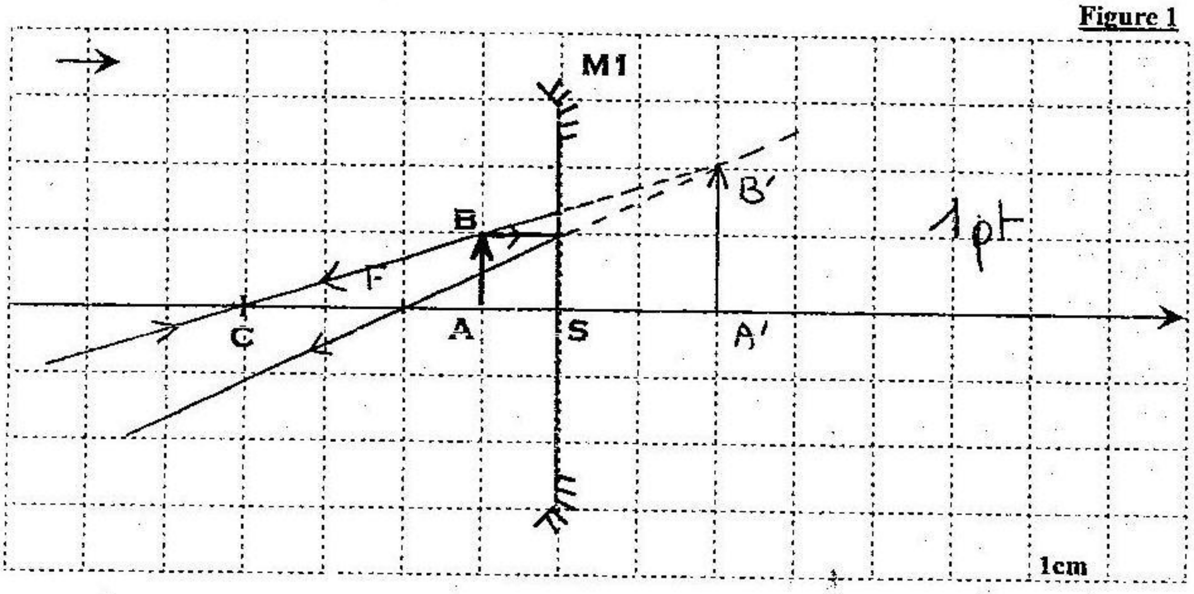
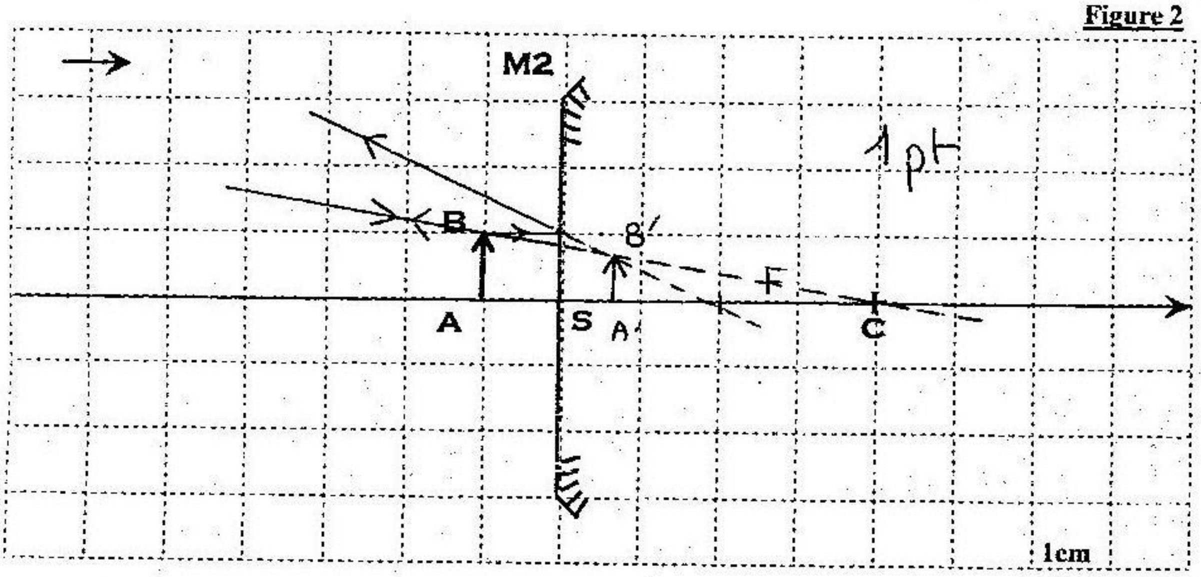


Figure 2



Université Cadi Ayyad
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique
Marrakech

Le 03 Avril 2006

Contrôle 1 – 1/2 Module d'Optique
Filières : SMP - SMC - SMA
Durée 1h30mn

Question de cours:

1. Donner la définition d'un dioptre plan.
2. Montrer, en faisant une construction géométrique, que la position de l'image A' d'un point objet réel A, à travers un dioptre plan est donnée par la relation:

$$\overline{HA'} = \overline{HA}.\frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1}$$

i_1, i_2: étant respectivement les angles d'incidence et de réfraction.
n_1, n_2 : étant respectivement les indices de réfraction du milieu d'entrée et du milieu de sortie.
H : est la projection du point A sur le dioptre plan
3. Monter que le dioptre plan n'est pas rigoureusement stigmatique pour un point objet quelconque de l'espace.
4. Montrer qu'on peut réaliser le stigmatisme approché si le dioptre plan est de faible étendue (angles d'incidences faibles). En déduire la relation de conjugaison du dioptre plan dans ces conditions. Commentez.

Exercice1 :

1. On considère un miroir sphérique concave de centre C, de sommet S et de rayon R=1m. En se plaçant dans les conditions d'approximation de Gauss :
   a. Déterminer sa distance focale ?
   b. On place un écran E sur l'axe optique de ce miroir à la distance d=5 m de son sommet S. Où doit-on mettre un petit objet pour en avoir une image nette sur E ? Calculer le grandissement linéaire γ?
   c. Déterminer la position d'un objet AB et celle de son image A'B', tel que le grandissement linéaire γ soit égal à +2. Faire une construction géométrique.
2. Compléter la marche des rayons lumineux incidents ou émergents des miroirs sphériques de la figure1.

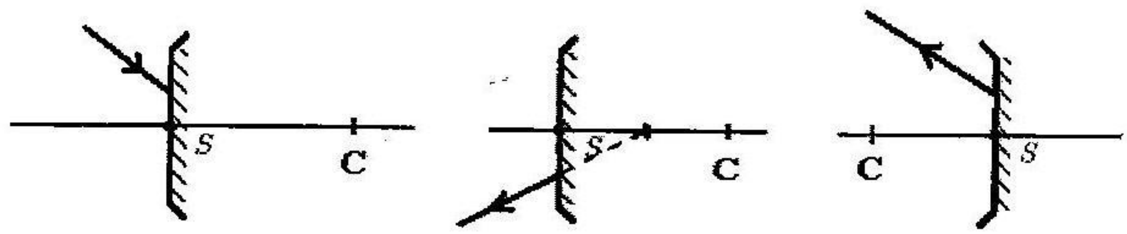


figure1

Exercice2:

Le rétroviseur intérieur d'une voiture est un miroir plan de largeur l =20 cm disposé verticalement. Ce miroir est situé sur l'axe X'X en son milieu A (X'X perpendiculaire au plan du miroir plan comme sur la figure2). Un individu, dont l'œil est situé dans l'espace réel du rétroviseur, cherche à déterminer en regardant dans le rétroviseur, la largeur BC de la façade d'une maison se trouvant à 20 m derrière lui. Sachant que l'œil O de l'observateur, est situé sur l'axe X'X en un point H tel que AH = 50 cm de façon à ce que l'image de la façade de la maison occupe entièrement son rétroviseur (figure2) :

1. Faire une construction géométrique de l'image de la façade, observée par l'œil à travers le rétroviseur.
2. Déterminer la largeur de l'image de la façade de la maison, observée par l'œil.

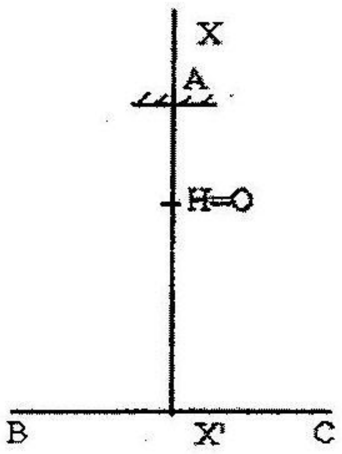


figure2

Exercice3 :

Un rayon lumineux se propage dans un verre d'indice n=1,5 et arrive sur la surface de séparation avec l'air sous une incidence de 35°.

1. Tracer la marche du rayon lumineux
2. Calculer l'angle de réfraction.
3. Calculer l'angle de réflexion totale.

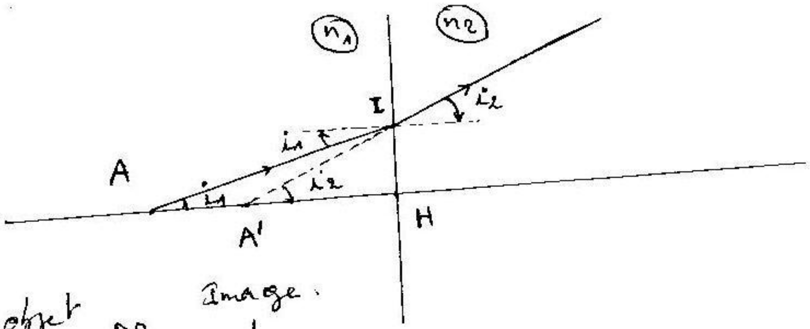
Contrôle N: 1 — Optique géométrique — Avril 2006

Filière . SMP. SMC. SMA

Question de cours :

1- un dioptre plan est l'ensemble de deux milieux inégalement réfringents séparés par une surface plane.

2-



objet $\qquad$ Image.

$$\underset{n_1}{A} \xrightarrow{DP} \underset{n_2}{A'}$$

Relation de conjugaison du dioptre plan . $\dfrac{\overline{HA}}{n_1} = \dfrac{\overline{HA'}}{n_2}$

$$\Rightarrow \overline{HA'} = \frac{n_2}{n_1}\overline{HA}$$

Le chemin optique L

$L = (AA') = (AI) + IA'$

on a $\cos i_1 = \dfrac{\overline{HA}}{\overline{AI}}$ et $\cos i_2 = \dfrac{\overline{HA'}}{\cos i_2}$

$\Rightarrow L = \dfrac{\overline{HA}}{\cos i_1} - \dfrac{\overline{HA'}}{\cos i_2}$ $\quad$ or $\quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

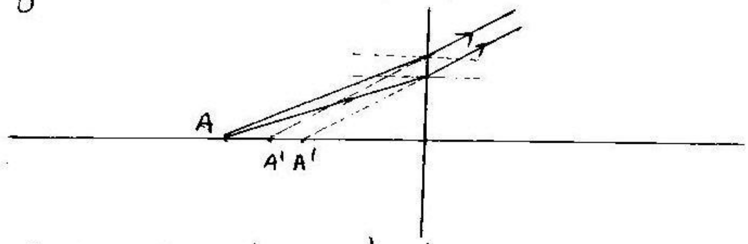
$\sin i_1 = \dfrac{\overline{HI}}{\overline{AI}}$; $\sin i_2 = \dfrac{\overline{HI}}{\overline{A'I}}$

donc on a $n_1 \cdot \dfrac{\overline{HI}}{\overline{AI}} = n_2 \dfrac{\overline{HI}}{\overline{A'I}} \Rightarrow n_1 \dfrac{\cos i_1}{\overline{HA}} = n_2 \dfrac{\cos i_2}{\overline{HA'}}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{HA'} = \frac{n_2}{n_1}\frac{\cos i_2}{\cos i_1}\cdot \overline{HA}}$$

3°)- chaque pt objet réel A emet des rayons lumineux.

sur un dioptre plan ne convergent pas vers une seul pt Image A' la position de l'image A' ne depend pas seulement de la position de l'objet A il depend aussi de l'angle d'incidence des rayon issue de l'objet A.



donc le dioptre plan n'est pas rigoureusement stigmatique.

4°)- pour des angles tres petites. On a $\cos i \simeq 1$

$\Rightarrow \quad \dfrac{\overline{HA'}}{n_2} = \dfrac{\overline{HA}}{n_1}$ pour des angles tres faible on peut realisé le stigmatisme approché.

l'image ne depend que de la position de l'objet dans le cas des approximations de Gauss.

Exercice 1

1°)- a)- On a $F' = F$. pour une miroir spherique.

si on place un objet à l'infini son image sera situé au foyer $F' \equiv A$ comme $\overline{SA} \to \infty$

relation de conjugaison : $\dfrac{1}{\overline{SA}} + \dfrac{1}{\overline{SA'}} = \dfrac{2}{\overline{SC}}$

si $\overline{SA} \to \infty$; $\overline{SF'} = \overline{SA'}$ donc $\dfrac{1}{\overline{SF'}} + 0 = \dfrac{2}{\overline{SC}}$

$\Rightarrow \overline{SF'} = \dfrac{\overline{SC}}{2}$ AN : $\overline{SF'} = \dfrac{\overline{SC}}{2} = -\dfrac{1}{2} = -0{,}5\ m$

b)- E : ecran, $d = 5m$, $\overline{SE} = -5m = \overline{SA'}$

On a $\dfrac{1}{\overline{SA'}} + \dfrac{1}{\overline{SA}} = \dfrac{2}{\overline{SC}}$ (Relation de conjugaison)

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2\overline{SA'} - \overline{SC}}{\overline{SC}\cdot\overline{SA'}} \Leftrightarrow \overline{SA} = \frac{\overline{SC}\cdot\overline{SA'}}{2\overline{SA'} - \overline{SC}}$$

$\overline{SC} = -5\,m$, $\overline{SA'} = -1\,m$

$$AN : \overline{SA} = \frac{(-5)\cdot(-1)}{2(-5)+1} = -0,5556\,m$$

* γ = grandissement :

$$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = -\frac{(-5)}{-0,56} = -8,93 \simeq -9$$

c°) - AB ? A'B' ? $\gamma = +2$.

$$\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = 2 \Rightarrow \overline{SA'} = -2\overline{SA}$$

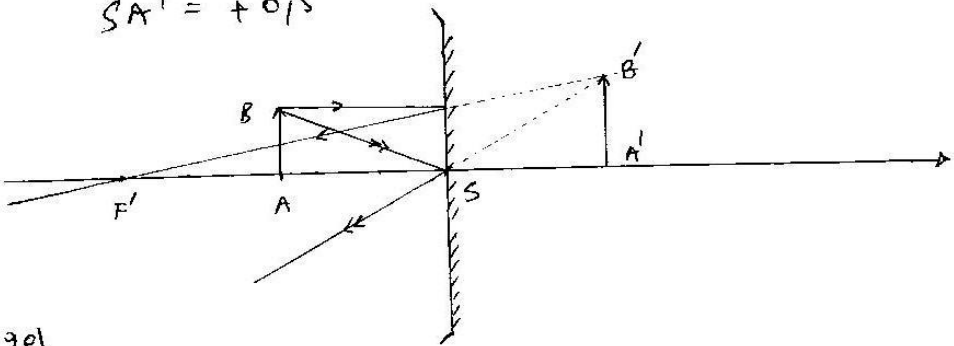
or : $\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}} \Rightarrow \frac{1}{2\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$

$$\frac{1}{\overline{SA}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\overline{SC}}$$

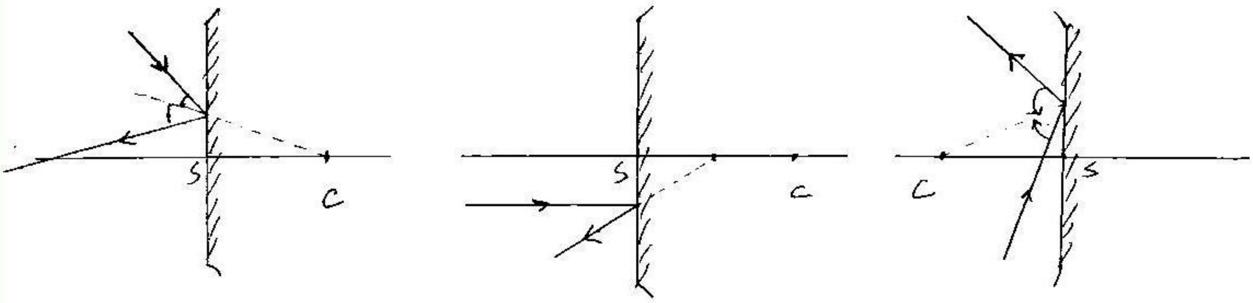
$\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{4}{\overline{SC}}$ $\quad \overline{SA} = \frac{\overline{SC}}{4} = -0,25\,m$.

Ech : 0,1 m = 1 cm $\frac{1}{100}$

$SA' = +0,5$

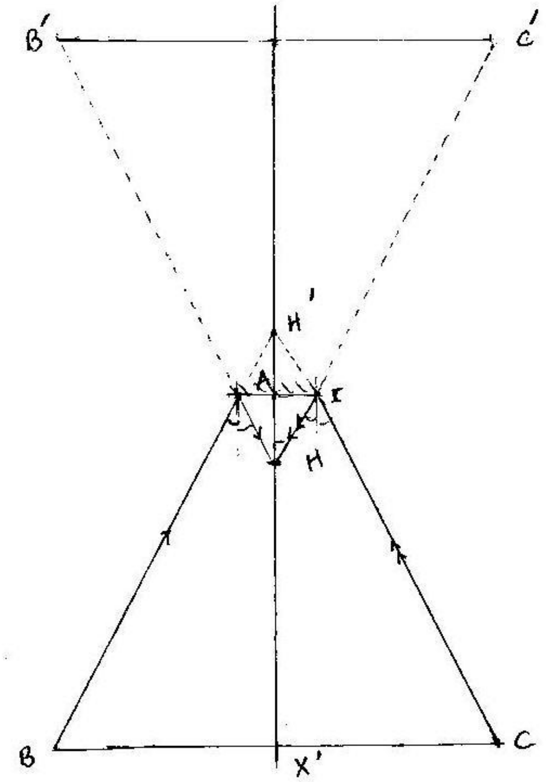


2°) -



Exercice 2:

1- Construction géométrique de l'image de la façade observée par l'oeil à travers le rétroviseur.



2- la largeur B'C' de l'image de la façade de la maison observée par l'oeil : $B'C' = BC$

$HX = 20$ m
$AH = 50$ cm $AH = AH' = 50$ cm $= 0,5$ m

dans le triangle $H'CX'$ on applique la relation de Taliss

on obtient $\frac{\overline{H'A}}{\overline{AX'}} = \frac{\overline{H'I}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{X'C}}$

donc $\overline{X'C} = \overline{AI} \cdot \frac{\overline{AX'}}{\overline{H'A}}$ avec $\overline{AX'} = AH + HX' = 0,5 + 20 = 20,5$ m

AN: $\overline{X'C} = 0,2 \cdot \frac{20,5}{0,5} = 8,2$ m $\overline{AI} = 0,1$ m

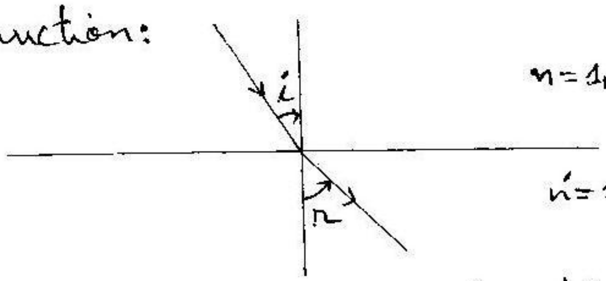
$\overline{H'A} = \overline{AH} = 0,5$ m

donc : $L = B'C' = 2 \times X'C = 8,2 \times 2 = 16,4$ m

4

Exercice 3 :

1. construction :



$n = 1,5$ (verre)

$n' = 1$ (air)

On a $n > n'$ or on a $n \sin i = n' \sin r \Rightarrow \sin i = \frac{n'}{n}$

$\Rightarrow \sin i < \sin r \Rightarrow i < r$

2. Calcul de l'angle de réfraction r ?

On a $n \sin i = n' \sin r$

$\Rightarrow \sin r = \frac{n}{n'} \sin i \Rightarrow r = \text{Arc}\sin\left(\frac{n}{n'} \sin i\right)$

AN, $i = 35°$, $n = 1,5$, $n' = 1$

$r = \text{Arc}\sin\left(\frac{1,5}{1} \sin(35)\right) = 59,35 = 60°$

3. l'angle de la reflexion totale :

pour qu'on reflexion totale il faut que $r \longrightarrow \pi/2$

$\Rightarrow i = i_e = \text{Arc}\sin\left(\frac{1}{1,5} \sin \pi/2\right)$

$= 41,8 \simeq 42°$

l'angle de reflexion totale est donc : 42°

Bon courage.

Université CADI AYYAD
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

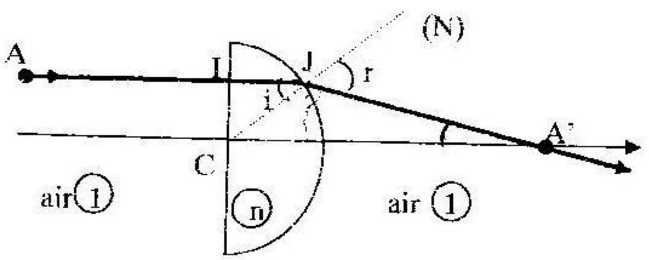
17 Avril 2008

Epreuve d'Optique
Filières : SMP – SMC – SMA
S2

Temps imparti : 1h 30 min

Exercice I (6 pts)

Soit une demi-boule de verre d'indice n, de centre C, et de rayon R, baignant dans l'air. Un rayon lumineux AI tombe perpendiculairement sur la face plane et sort, après avoir traversé le verre, par la face sphérique en J (figure ci-dessous).



1) Calculer le chemin optique (AA') en fonction de AI, R, n, i et r.

2) Y'a t il stigmatisme rigoureux? Justifier votre réponse.

3) Calculer $\overline{CA'}$ en fonction de R, i et r.

a) Montrer, en utilisant l'angle limite correspondant à la réflexion total, que la position limite du point A'_l est $\overline{CA'_l} = \dfrac{R}{\cos l}$ avec $l = \arcsin(\dfrac{1}{n})$.

b) Montrer que dans le cas du stigmatique approché : $\overline{CA'} \approx \dfrac{nR}{n-1}$.

Exercice II (7 pts)

A) On considère un miroir convexe de sommet **S** et de centre **C** tel que $\overline{SC} = 4m$.

Déterminer, par construction géométrique, les caractéristiques (position, nature et taille) de l'image **A'B'** d'un objet **AB** dans les deux cas suivants :

1) L'objet **AB** est **réel**, de hauteur **1 cm**, placé à **2 m** du sommet S du miroir.

2) L'objet **AB** est **virtuel**, de hauteur **1 cm**, placé à **6 m** du sommet S du miroir.

Echelle : 1/100 sur l'axe des abscisses

B) Un miroir concave, de sommet **S** et de centre **C,** forme l'image A'B' d'un objet AB sur un écran placé à **8 m** du sommet **S.**

1) Déterminer la position de l'objet AB ($\overline{SA}$ = ?).

2) Calculer le rayon de courbure $\overline{SC}$ et la distance focale f de ce miroir.

Données : $\overline{AB} = 1cm$ et $\overline{A'B'} = -4\ cm$

Exercice III (7 pts)

Soit un dioptre sphérique convexe, air (n = 1) /verre (n'= 1,5), de sommet S et de centre C. Son rayon de courbure est de 20 cm. On cherche à déterminer l'image qu'il donne d'un objet AB de hauteur 1,5 cm.

1) On procède d'abord analytiquement. Quels sont la position, la nature et le grandissement de l'image si :

a) l'objet est réel, situé à 20 cm de S ?

b) l'objet est virtuel situé à 10 cm de S ?

2) On procède maintenant géométriquement afin de vérifier les résultats précédents.

a) Quels éléments manquent-ils pour réaliser la construction géométrique ? Déterminer leurs positions. Déduire la nature, convergente ou divergente, du dioptre.

b) Sur deux figures distinctes, construire l'image des deux objets précédents et vérifier leurs positions et leurs grandissements (Echelle : 1/10 sur l'axe des abscisses).

3) Compte tenu des éléments précédents, peut-on, sans calcul ni construction géométrique, déterminer la position de l'image des objets suivants (si oui, détailler votre raisonnement et préciser la position de l'image) :

a) si $\overline{SA}$ = - 40 cm ?

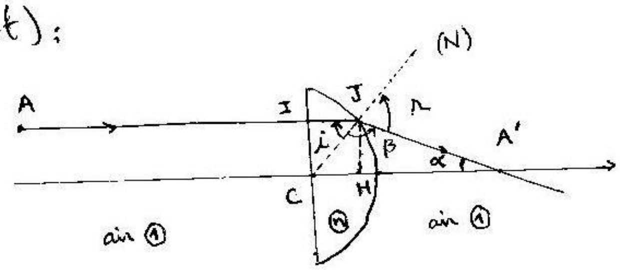
b) si $\overline{SA}$ = + 60 cm ?

Optique geométrique Avril 2008

Filière : SMP-SMC-SMA

Contrôle N° : 1

Exercice I (6pt) :



1°)- Calcule de chemin optique (AA').

On a $(AA') = 1.\overline{AI} + n\,\overline{IJ} + 1.\overline{JA'}$ or dans le triangle droit IJC

$$\cos i = \frac{IJ}{JC} = \frac{IJ}{R} \Rightarrow IJ = R\cos i$$

On a $\beta + \alpha + i = \pi$ et $(\pi - r) + \alpha + i = \pi \Rightarrow \alpha = r - i$

donc $\cos(r-i) = \dfrac{\overline{HA'}}{JA'} \Rightarrow \overline{JA'} = \dfrac{\overline{HA'}}{\cos(r-i)}$

On a $tg(r-i) = \dfrac{\overline{JH}}{\overline{HA'}}$ et $\overline{HA'} = \dfrac{\overline{JH}}{tg(r-i)}$

or $\sin i = \dfrac{\overline{JH}}{\overline{JC}} \Rightarrow \overline{JH} = R\sin i$

donc $\overline{JA'} = \dfrac{\overline{HA'}}{\cos(r-i)} = \dfrac{1}{\cos(r-i)} \cdot \dfrac{\overline{JH}}{tg(r-i)} = \dfrac{1}{\cancel{\cos(r-i)}} \cdot \dfrac{\cancel{\cos(r-i)}}{\sin(r-i)} \cdot R\sin i$

$$\overline{JA'} = \frac{R\sin i}{\sin(r-i)}$$

d'où le chemin (AA') est donc :

$$(AA') = \overline{AI} + n\,R\cos i + \frac{R\sin i}{\sin(r-i)}$$

2°)- la position de A' dépend de l'angle i c'est-à-dire pour deux angles d'incidences différents on aura 2 image déffèrent $\Rightarrow$ on ne peut pas realiser le stigmatisme

3°) - $\overline{CA'}$ en fonction de R, i et r :

on a $\overline{CA'} = \overline{CH} + \overline{HA'}$ or : $\overline{HA'} = \dfrac{\overline{IH}}{tg(r-i)} = \dfrac{R\sin i}{tg(r-i)}$

et $\overline{CH} = R\cos i$.

$$\Rightarrow \left\| \overline{CA'} = R\cos i + \frac{R\sin i}{tg(r-i)} \right.$$

ou bien :

on considère le triangle $CA'I$

$$\frac{\overline{CI}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{CA'}}{\sin(\pi-\alpha-\beta)} = \frac{\overline{CA}}{\sin(\pi-r)} \Rightarrow \frac{\overline{CI}}{\sin(r-i)} = \frac{\overline{CA'}}{\sin(\lambda-r)} = \frac{\overline{CA'}}{\sin r}$$

$$\Rightarrow \frac{R}{\sin r\cos i - \sin i\cos r} = \frac{\overline{CA'}}{\sin r}$$

$$\overline{CA'} = \frac{\sin r \cdot R}{\sin r\cos i - \frac{\sin r}{n}\cos r} = \frac{nR}{n\cos i - \cos r}$$

les deux expression de $\overline{CA'}$ sont valable et equivalente.

pour $i \Rightarrow l \Rightarrow \overline{CA_l} = \dfrac{nR}{n\cos l} = \dfrac{R}{\cos l} \Rightarrow l = \text{Arcsin}\left(\dfrac{1}{n}\right)$

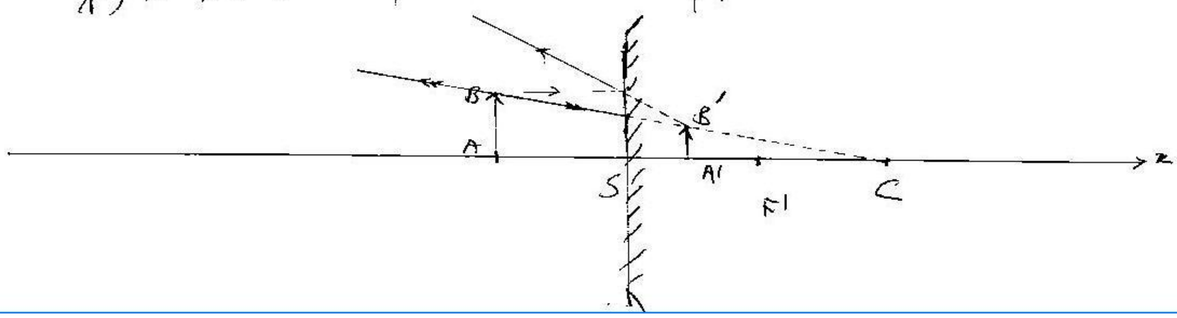
b°) $i \to 0 \Rightarrow CA'_0 = \dfrac{nR}{n-1}$

donc l'image est situé au segment $[A'_0, A'_l]$.

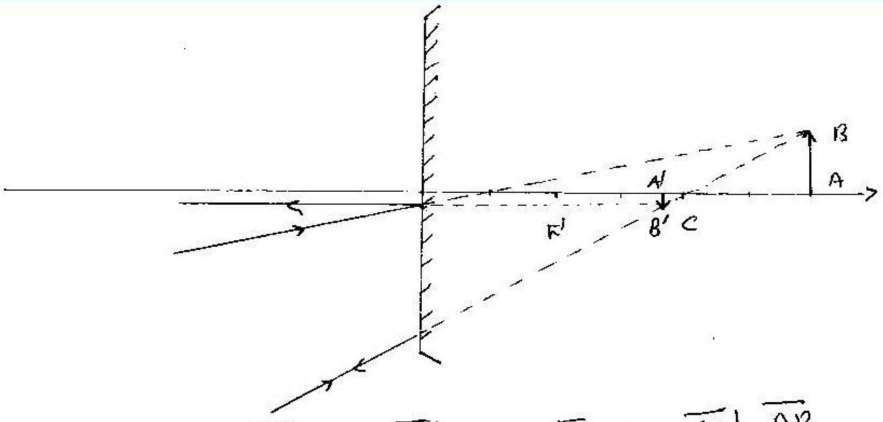
Exercie II

A) - miroir convexe de sommet S et de centre C, $\overline{SC} = 4$ cm

1°) - AB est réel, de hauteur 1cm, placé à 2 m du sommet S



2°) -



B) - 1 - $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} \Rightarrow \overline{SA} = -\overline{SA'} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = -2\,m$

2) - On a $\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \Rightarrow \overline{SC} = 2\,\frac{\overline{SA'} \times \overline{SA}}{\overline{SA'} + \overline{SA}}$

$\Rightarrow \overline{SC} = -3{,}2\,m$

$f = \frac{SC}{2} = 1{,}6\,m$

Exercice III (7pts)

1°) . formule de conjugaison : $\frac{n-n'}{\overline{SC}} = \frac{n}{\overline{SA'}} - \frac{n'}{\overline{SA}}$ ①

a) objet reel $\Rightarrow \overline{SA} = -20\,cm$

① $\Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{n-n'}{\overline{SC}} + \frac{n'}{\overline{SA}}$

$\Rightarrow \overline{SA'} = \dfrac{n'}{\frac{n'-n}{\overline{SC}} + \frac{n}{\overline{SA}}}$ $n = 1$, $n' = 1{,}5$ $\overline{SC} = 20$ $\overline{SA} = -20$

AN : $\overline{SA} = 60\,cm$

le grandissement a pour expression $\gamma = \frac{n\,\overline{SA'}}{n'\,\overline{SA}} = 2$.

b°) - objet virtuel $\overline{SA} = +10\,cm$

De même $\overline{SA'} = \dfrac{n'}{\frac{n'-n}{\overline{SC}} + \frac{n}{\overline{SA}}} = 12\,cm$ Image réelle.

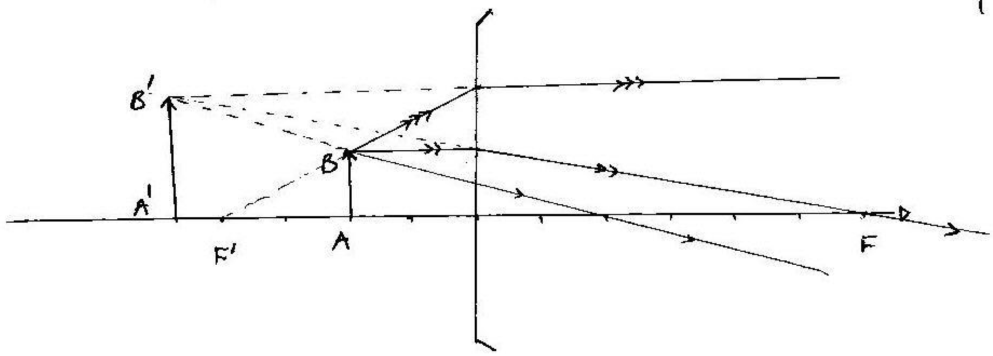
$\gamma = \frac{n}{n'} \cdot \frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = +0{,}8$

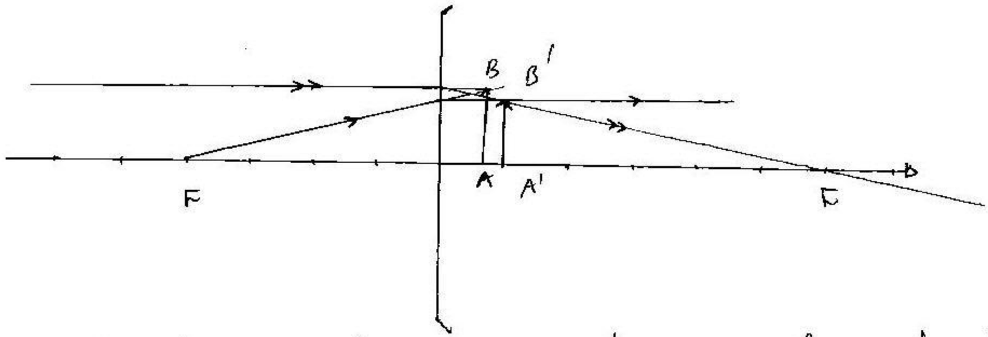
2) – a)- pour réaliser la construction, nous avons besoin de connaitre la position des foyer objet F et Foyer image F' :

on a $\overline{SF} = n \dfrac{\overline{SC}}{n-n'} = 1 . \dfrac{20}{1-1,5} = -40$ cm

et $\overline{SF'} = n' \dfrac{\overline{SC}}{n'-n} = 60$ cm.

b°) – le dioptre est convergent : Ech : 1/10





les construction sont en accord avec les calculs.

3°)- objet particulier

a)- si $\overline{SA} = -40$ cm on a alors $A \equiv F$ l'objet confondue avec au foyer donc l'image à l'infini $\Rightarrow \overline{SA'} \to \infty$

b°)- si $\overline{SA} = 60$ cm on a alors l'objet est palacé au foyer image ce n'est pas une position particulier donc on ne peut pas conclue.

Université CADI AYYAD
Faculté des Sciences Semlalia
Département de Physique

Mercredi 8 avril 2009

Epreuve d'optique
Contrôle n° 1 – Filières : SMP, SMC, SMA
S2

Temps imparti : 1h30 min

Questions de cours (6 points)

1) Enoncer le principe de Fermat
2) Déduire, du principe de Fermat, le trajet de la lumière dans un milieu homogène d'indice n
3) Définir le stigmatisme rigoureux et donner un exemple de système optique rigoureusement stigmatique
4) Soit un dioptre sphérique de centre C et de sommet S qui sépare deux milieux d'indice respectifs n et n'

a) Rappeler la relation de conjugaison avec origine au sommet pour un couple (A, A')

b) En déduire les expressions des distances focales f et f' en fonction de n, n' et $\overline{SC}$

c) Peut-on avoir f = f' ? justifier votre réponse.

Exercice I (7 points)

On considère une lame de verre à faces parallèles, d'indice n = 1,5 et d'épaisseur e = 2 cm placée dans un milieu d'indice de réfraction égal à 1.

1) Un rayon lumineux **SI** (venant d'une source S) tombe sur la lame en un point **I** sous un angle d'incidence i = 45°.

a) Calculer la valeur de l'angle de réfraction **r** à l'intérieur de la lame.

b) Déterminer l'expression du déplacement latéral **Δ** que subit le rayon incident **SI** lors de la traversée de la lame. Calculer la valeur de **Δ**

2) On suppose que la lame vérifie les conditions d'approximation de Gauss. Soit A un point lumineux situé à 4 cm de la première face de la lame (voir figure 1).

a) Construire géométriquement l'image A' de A donnée par la lame. En déduire sa nature

b) Déterminer $\overline{AA'}$ dans les conditions de l'approximation de Gauss (faire la démonstration). Calculer la valeur de $\overline{AA'}$.

Contrôle N°: 1 — Optique géométrique — Avril 2009

Filière : SMP-SMC-SMA

Semestre 2

Question de cours : (6 points)

1°) - Enoncé du principe de Fermat :

Le trajet suivit par les rayons lumineux pour aller d'un point M_1 vers un point M_2 est celui pour lequel le chemin optique est extremum « $dL = 0$ »

Pour aller d'un point à un autre, la lumière suit le trajet dont le chemin optique est extrémal ⇒ le trajet est tel que la durée est extrémale.

2°) - $L = \int_{AB} n\, dl$

3- Soit un point objet A qui envoi des rayons lumineux sur un système optique S. Si tous les rayons sortants du système S passant par un seul point A'. On dit que S est alors rigoureusement stigmatique pour le couple de points conjuguée A et A'.

exemple : miroir plan, les lentille.

4°) - a) relation de conjugaison d'un dioptre sphérique.

$$\frac{n'}{\overline{CA'}} - \frac{n}{\overline{SA}} = \frac{n'-n}{\overline{CS}}$$ d'origine au ~~sommet~~.

b) - le foyer objet f est un point défini quand l'image est à l'infini, càd. A' à l'infini

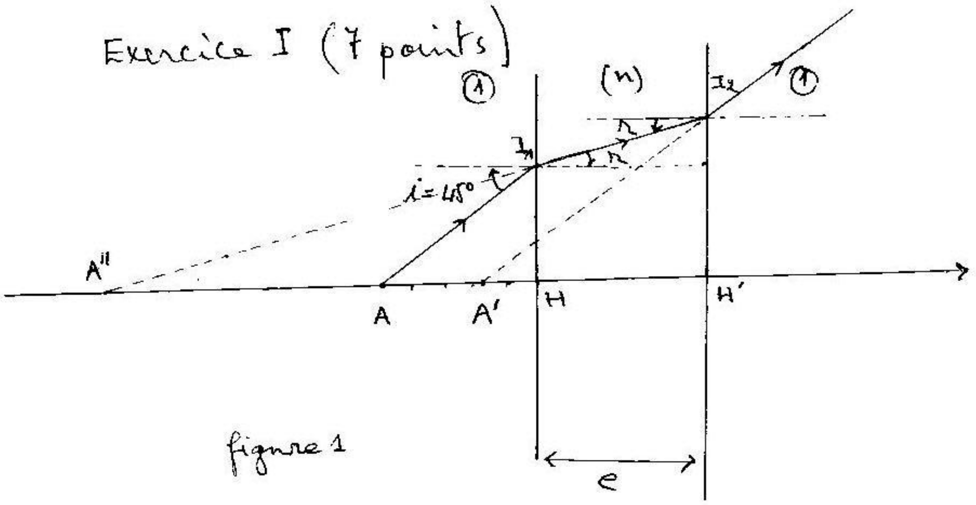
$$\Rightarrow \frac{(n'-n)}{\overline{SC}} = (0) - \frac{n}{\overline{SF}} \Rightarrow f = \overline{SF} = n\frac{\overline{SC}}{(n-n')} \quad ②$$

le foyer image F' est un point image tel que l'objet est à l'infini $\Rightarrow \frac{(n'-n)}{\overline{SC}} = \frac{n'}{\overline{SF'}} - (0) \Rightarrow f' = \overline{SF'} = \frac{n'}{(n'-n)}\overline{SC}$ ①

c) - D'après (1) et (2) $\Rightarrow \frac{\overline{SF}}{\overline{SF'}} = \frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$

pour $n = n' \Rightarrow f = -f'$

Exercice I (7 points)



échelle : $\frac{1}{2}$

figure 1

1°) - D'après la loi de Snell-Descartes :

$1 \cdot \sin i = n \sin r \Rightarrow \sin r = \frac{\sin i}{n} \Rightarrow r = \text{Arcsin}\left(\frac{\sin i}{n}\right)$

AN, $r = \text{Arcsin}\left(\frac{\sin(45)}{1{,}5}\right) = 28°{,}12$

b) - On a $\cos r = \frac{e}{\Delta} \Rightarrow \Delta = \frac{e}{\cos r} = \frac{2}{\cos 28} = 2{,}267\ cm$

2°) -

a) : Construction géométrique de l'image A' de A donnée par la lame (voir figure 1 :)

nature de l'image : virtuel.

la face D_1 donne l'image A'' $(A \longrightarrow A'')$ voir figure 1.

$\Rightarrow \frac{\overline{HA''}}{n} = \frac{\overline{HA}}{1}$

la face D_2 donne l'image A' $(A'' \longrightarrow A')$

$\frac{\overline{H'A'}}{1} = \frac{\overline{H'A''}}{n}$

$\overline{AA'} = \overline{AH} + \overline{HH'} + \overline{H'A'} = ?$

on a $\overline{A'H'} = \frac{\overline{H'H}}{n} + \frac{\overline{HA''}}{n} = \frac{\overline{H'H}}{n} + \overline{HA}$

$\Rightarrow \overline{AA'} = \overline{AH} + \overline{HH'} + \overline{H'A'} = \overline{AH} + \overline{HH'} + \overline{HA} + \dfrac{\overline{H'H}}{n} = \cancel{\overline{HA}} + \cancel{\overline{AH}} + \overline{HH'} + \dfrac{\overline{H'H}}{n}$

$\Rightarrow \overline{AA'} = HH'\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ or : $\overline{HH'} = e$

Alors : $\overline{AA'} = e\left(\frac{n-1}{n}\right)$

AN, $\overline{AA'} = 2.\left(\frac{1{,}5-1}{1{,}5}\right) = -0{,}666$ cm (la signe moin car l'image est virtuelle).

Exercice II (7 points)

1°)- les application des approximation de Gauss sert à simplifier les formule et rendre les calcule simple.

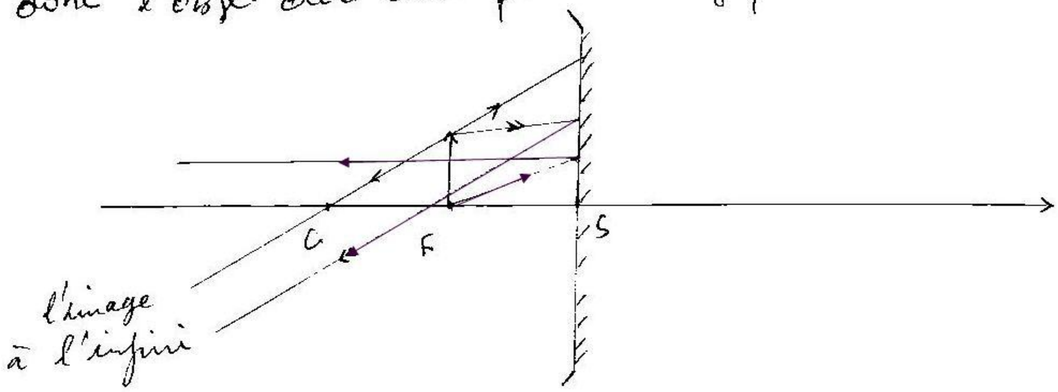
2)- Miroir sphérique convergent (concave).

a)- On a la relation de conjugaison.

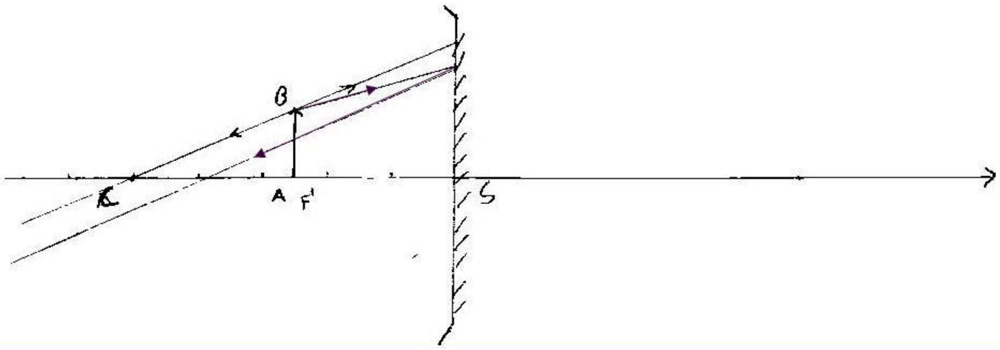
$\frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}}$ l'image à l'infini $\Rightarrow \frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SA}}$

$\Rightarrow \overline{SA} = \frac{\overline{SC}}{2} = f'$

donc l'objet doit être placer au foyer de la miroir.



b°)-



c°) - l'image est réelle situé à l'infini agrandie par rapport à AB et renversé (sens opposé de l'objet)

d°) - Calcul de la position de l'image.

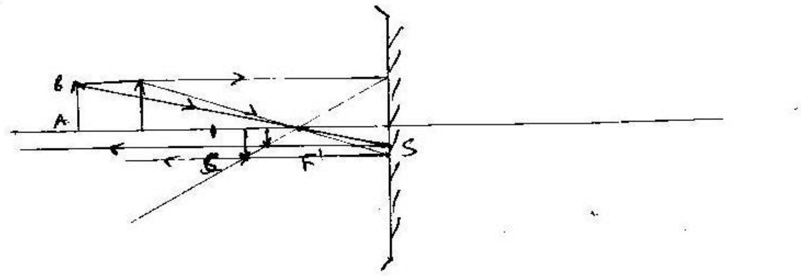
formule de conjugaison : $\frac{2}{\overline{SC}} = \frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} - \frac{1}{\overline{SA}}$

$$\Rightarrow \overline{SA'} = \frac{\overline{SC} \cdot \overline{SA}}{2\overline{SA} - \overline{SC}}$$

AN : $\overline{SC} = -20\ Cm$ $\overline{SA} = -10\ Cm$ $\overline{SA'} = \frac{(-10)\cdot(-20)}{2(-10)-(-20)} = \infty$

l'image situé à l'infini.

e) - pour obtenir l'image renversé, il faut rapproche l'objet de la miroir.



3°) - On a $\Gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ $\overline{SA'} = -0{,}5\ m = 50\ Cm$ $\overline{SA} = -10\ Cm$

AN : $\Gamma = +\frac{50}{10} = 5$

le grandissement $\Gamma = 5$ 5 fois plus grand que l'objet

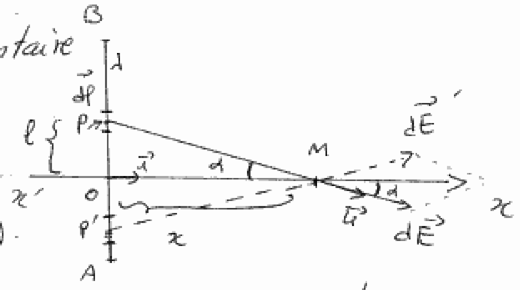
Exercice

1 - calculer le champ électrostatique crée par un segment de de droite AB uniformément chargé avec une densité linéique λ, en un point M de l'axe $(x\acute{x})$

2 - En déduire le champ électrostatique crée par un fil infinie.

1/ un élément de longueur $d\ell$, centré en P, creé en M un champ élémentaire

$$d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{dq}{PM^2}\vec{u}$$



par raison de symétrie le champ crée par le segment est porté par l'axe (ox).

En effet, deux élément de charge dq de longueur $d\ell$ centré en P et P' symétrique par rapport à (ox), créent en O deux champs élementaires $d\vec{E}(M)$ et $d\vec{E}'(M)$ dont la résultante est portée par l'axe (ox).

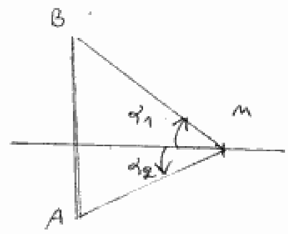
il en même pour toutes les autres paires d'élément de charges de la distribution. Ansi le champ total est porté par l'axe ox.

donc $d\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\lambda d\ell}{PM^2}\cos\alpha\,\vec{i}$ $\qquad \vec{u} = \cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}$

on a $tg\,\alpha = \frac{\ell}{x} \Rightarrow \ell = x\,tg\,\alpha \Rightarrow d\ell = x\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$

et $\cos\alpha = \frac{x}{PM} \Rightarrow PM = \frac{x}{\cos\alpha} \Rightarrow PM^2 = \frac{x^2}{\cos^2\alpha}$

$$\Rightarrow d\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\frac{x\,d\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}}}{\frac{x^{\cancel{2}}}{\cancel{\cos^2\alpha}}}\cos\alpha\,\vec{i}$$



$$\Rightarrow d\vec{E}(M) = \frac{\lambda\,d\alpha}{4\pi\varepsilon x}\cos\alpha\,\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \int_{AB} d\vec{E}(M) = \int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\frac{\lambda\cos\alpha}{4\pi\varepsilon x}d\alpha\,\vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon x}\left[\sin\alpha\right]_{\alpha_2}^{\alpha_1}\vec{i} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon x}(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)\vec{i}$$

2) fil infini $\Rightarrow \alpha_1 \to +\frac{\pi}{2}$ et $\alpha_2 \to -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \vec{E}_{fil}(M) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon x}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\lambda}{\cancel{4}\pi\varepsilon x}(1+1)\vec{i}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}_{fil}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon x}\vec{i}}$$

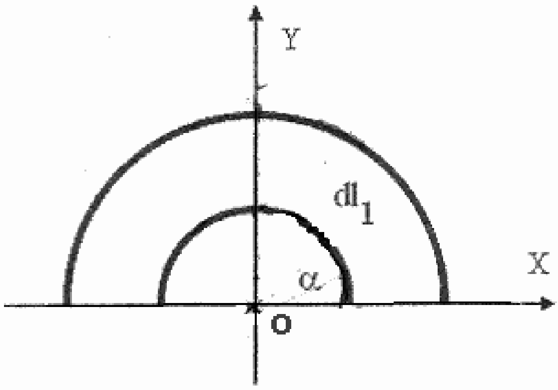
UNIVERSITE CADI AYYAD
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
MARRAKECH

Année universitaire 2007/2008

Contrôle 1 : Module de Physique 2 SMPC-SMA
Electricité durée 1h30

Exercice I

Deux fils ont la même forme, celle d'un demi cercle de centre **O** (voir figure). Le premier a un rayon $R_1 = R$ et le deuxième a un rayon $R_2=2R$. Les deux fils sont chargés électriquement avec la même densité linéique constante λ ($\lambda > 0$)



1) Donner l'expression du champ élémentaire $\overrightarrow{dE_1}(O)$ crée par un élément dl_1 du premier fil au centre **O**, en fonction de λ, R, α, $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
2) Calculer le champ $\overrightarrow{E_1(O)}$ crée par le premier fil au centre **O**
3) En déduire le champ $\overrightarrow{E_2}(O)$ crée par le deuxième fil au centre **O**, et le champ total $\vec{E}(O)$ au point **O**
4) Déterminer le potentiel total V(**O**) crée par les deux fils au point **O**
5) Quelle est la force électrostatique exercée par les deux fils sur une charge ponctuelle **Q** placée au point **O**,

Les deux fils sont maintenant complétés par deux demi cercles de manière à former deux spires concentriques. Ces deux demi cercles sont chargés électriquement avec la même densité linéique - λ

6) Quel est le champ résultant au point **O**

Exercice II

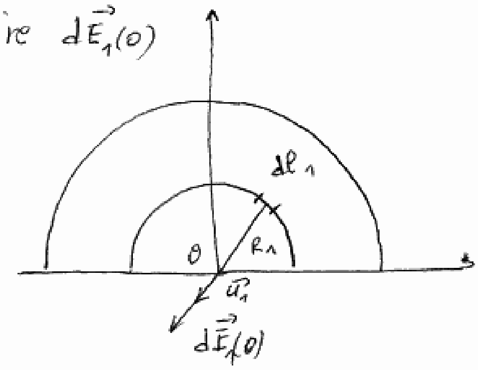
Une distribution volumique de charge est uniformément répartie entre deux plans infinis d'équations **z = a** et **z= - a** (a >0) avec une densité volumique constante ρ. (ρ>0)

1) Enoncer le théorème de Gauss
2) En utilisant la symétrie et l'invariance de la distribution, préciser la direction et le sens du champ en tout point de l'espace ainsi que les variables dont dépendra le champ, et montrer que le champ est nul pour les points du plan **(xOy)**
3) Quelle est la surface de Gauss convenable pour calculer le champ électrostatique en un point M quelconque de l'espace, justifier votre réponse
4) En utilisant le théorème de Gauss déterminer le champ électrostatique en tout point P de l'espace de coordonnées (x,y,z)
5) En déduire le potentiel en tout point de l'espace, On prendra V(**O**) = 0.

contrôle N°1 2007 / 2008
Electricité SMPC / SMA

Exercice I :

1/ l'expression du champ élémentaire $d\vec{E}_1(O)$



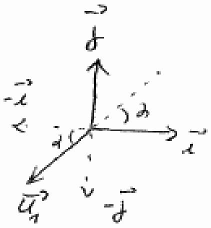
on a $d\vec{E}_1(O) = \dfrac{dq_1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{\vec{u}_1}{R_1^2}$

$\vec{u}_1$: vecteur unitaire de R_1

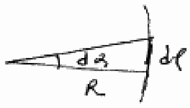
$dq_1 = \lambda\, d\ell_1$ et $R_1 = R$

$\Rightarrow d\vec{E}_1(O) = \dfrac{\lambda\, d\ell_1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{\vec{u}_1}{R^2}$

$\vec{u}_1 = -\cos\alpha\,\vec{i} - \sin\alpha\,\vec{j}$



$d\ell = R\,d\alpha$



$\Rightarrow d\vec{E}_1(O) = \dfrac{-\lambda\, d\alpha}{4\pi\varepsilon R}\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\right).$

2/ le champ $\vec{E}_1(O)$ crée par le 1er fil au centre O

on a $\vec{E}_1(O) = \displaystyle\int_{fil} d\vec{E}_1(O) = \int_{fil} \frac{-\lambda\, d\alpha}{4\pi\varepsilon R}\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\right)$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon R}\int_0^{\pi}\cos\alpha\,\vec{i}\,d\alpha + \int_0^{\pi}\sin\alpha\, d\alpha\,\vec{j}.$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon R}\left[\sin\alpha\right]_0^{\pi}\vec{i} + \left[-\cos\alpha\right]_0^{\pi}\vec{j}$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon R}\left[(\sin\pi - \sin 0)\,\vec{i} - (\cos(\pi) - \cos(0))\,\vec{j}\right]$$

$$= -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon R}\left(0 - (-1-1)\vec{j}\right)$$

$$\vec{E}_1(O) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon R}\,\vec{j}$$

3/ * le champ $E_2(O)$

on remplace R par $2R$.

$$\Rightarrow \quad \vec{E}_2(0) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon R}\,\vec{j}$$

* le champ $\vec{E}(0)$ au point O

$$\vec{E}(0) = \vec{E}_1(0) + \vec{E}_2(0) = \frac{-\lambda\,\vec{j}}{2\pi\varepsilon_0 R} - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon R}\vec{j}$$

$$= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon R}\left(1-\frac{1}{2}\right)\vec{j} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon R}\cdot\frac{1}{2}\,\vec{j}$$

$$\vec{E}(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon R}\,\vec{j}.$$

4/ le potentiel total $V(0)$

on a $V(0) = V_1(0) + V_2(0)$

avec $V_1(0) = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{R} = \int \frac{\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon R} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon R}\int_0^{\pi} R\, d\theta$

$$V_1(0) = \frac{\pi \cancel{R}\lambda}{4\cancel{\pi}\varepsilon\cancel{R}} = \frac{\lambda}{4\varepsilon}$$

et $V_2(0) = \int_0^{\pi}\frac{\lambda\, R\,d\theta}{4\pi\varepsilon(2R)} = \frac{\lambda \cancel{R}}{8\pi\varepsilon\cancel{R}}\int_0^{\pi} d\theta = \frac{\pi\lambda}{8\cancel{\pi}\varepsilon} = \frac{\lambda}{8\varepsilon_0}$

finalement $V(0) = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0} + \frac{\lambda}{8\varepsilon} = \frac{\lambda}{4\varepsilon_0}\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{4\varepsilon}\,\frac{3}{2}$

d'où $V(0) = \frac{3\lambda}{8\varepsilon_0}$

5) la force électrostatique exercée par les 2 fils sur une charge Q placée au point O.

on a $\vec{F}_Q = \vec{F}_{q_1Q} + \vec{F}_{q_2Q} = Q\,\vec{E}_1(0) + Q\,\vec{E}_2(Q)$

$$\vec{F}_Q = Q\left(\vec{E}_1(0) + \vec{E}_2(0)\right) = Q\,\vec{E}(0)$$

$$\Rightarrow \vec{F}_Q = -\frac{\lambda Q}{4\pi\varepsilon R}\,\vec{j}$$

6) le champ résultant au point O

on a $\vec{E}_+(0) = \frac{+\lambda}{4\pi\varepsilon R}(-\vec{j})$ le champ crée par les 2 fils chargées par $-\lambda$

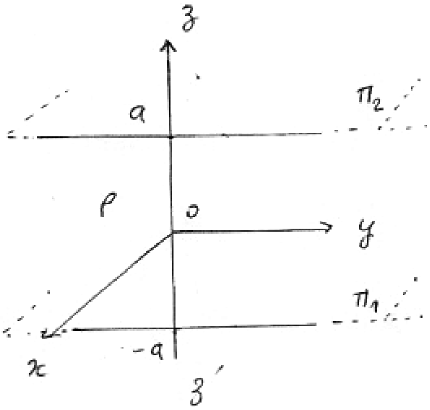
et $\vec{E}_-(0) = \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon R}\,\vec{j}$ le champ crée par les 2 fils chargées $+\lambda$

donc $\vec{E}(o) = \vec{E}_+(o) + \vec{E}_-(o)$

$$= \frac{-\lambda}{4\pi\varepsilon R}\vec{j} - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon R}\vec{j} = \frac{-2\lambda}{4\pi\varepsilon R}\vec{j}$$

$$= \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon R}\vec{j}.$$

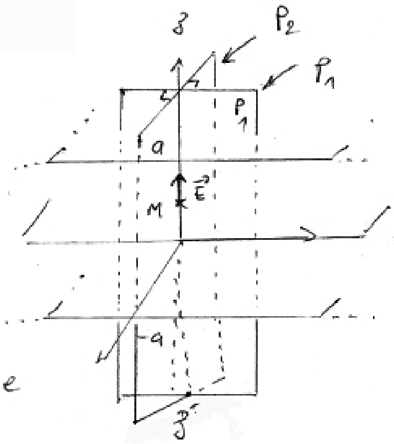
Exercice II :



1/ le théorème de Gauss :
le flux du vecteur champ électrostatique sortant d'une surface fermée S_g est égal au quotient par ε_0 de la somme algébrique des charges intérieures de S_g

$$\oiint_{S_g} \vec{E}.\vec{ds} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

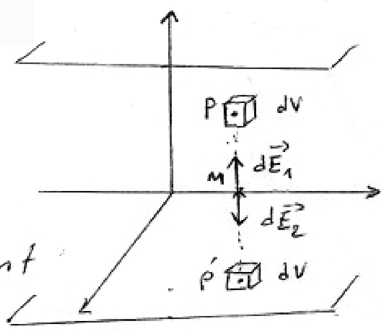
2) la direction et le sens du champ



la distribution admet comme plans de symétrie un plan P_1 passant par M et contenant l'axe (zz') et un autre plan P_2 perpendiculaire à ce plan. on déduit alors que le champ $\vec{E}$ est porté par l'intersection de ces plan c'est a dir l'axe de direction $\vec{k}$

* La distribustion est invariante par tout translation selon les axes (yy') et (xx')

$$\Rightarrow \quad \vec{E}(M) = E(z)\vec{k}$$



* le champ est nul pour les point du plan (xoy). En effet deux élement de charges dq de volume dV centré en P et P' symétriques par rapport à (xoy), creént en M deux champ élementaires $d\vec{E}_1$ et $d\vec{E}_2$ dont la résultante est nul.
il en est de même pour toutes les autre paires d'élement de charge

3/ la surface de Gauss convenable.

le champ $\vec{E}(M)$ est constant sur un cylindre d'axe zz' et de rayon r, la surface de Gauss convenable sera un cylindre de rayon r et de hauteur z.

4) calcul de champ électrostatique $\vec{E}(M)$

on a le théorème de Gauss : $\phi = \oiint_{Sg} \vec{E}(M).\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

Sg : surface de Gauss.

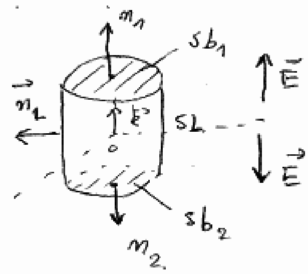
ϕ : le flux de $\vec{E}$ à travers Sg

* calcul de ϕ

on a $\phi = \oiint_{Sg} \vec{E}(M).\vec{dS} = \oiint_{Sg} E.\vec{k}.\vec{dS}$

$S_g = S_{b_1} + S_{b_2} + S_L$ | S_{b_1} et S_{b_2} sont les bases. S_L : surface latéral

$\Rightarrow \phi = \iint_{S_{b_1}} \vec{E}(M).\vec{dS} + \iint_{S_{b_2}} \vec{E}(M).\vec{dS} + \iint_{S_L} \vec{E}(M).\vec{dS}$.



or $\vec{E}(M) = E\vec{k}$; $\vec{n}_1 = \vec{k}$, $\vec{n}_2 = -\vec{k}$, $\vec{n}_L = \vec{e_r}$

avec $\vec{n}_1.\vec{k} = 1$, $\vec{n}.\vec{k} = -1$ et $\vec{k}.\vec{e_r} = 0$

donc $\phi = \iint_{S_{b_1}} E\vec{k}dS_{b_1}\vec{k} + \iint_{S_{b_2}} -E\vec{k}dS_{b_2}.-\vec{k}$

$= \iint_{S_{b_1}} E.dS_{b_1} + \iint_{S_{b_2}} E.dS_{b_2}$; avec S

sur un cylindre de rayon r et d'axe (zz') le champ est constant.

$\Rightarrow \phi = E.S_{b_1} + ES_{b_2} = 2ES_{b_1}$ (car $S_{b_1} = S_{b_2} = S$)

$= 2ES = 2E \times \pi r^2 z$ $\quad$ r $\quad S = \pi r^2$

$\Rightarrow \phi = 2E.\pi r^2 z$

* $Q_{int} = \iiint \rho\, dV = \rho.V$ $\quad$ (V : volume du cylindre)

les charges sont situé dans le volume du cylindre de Gass.

$Q_{int} = \rho \times \pi r^2 z$

donc $\cancel{2} E \cdot \cancel{\pi r^2} \cancel{z} = \frac{\rho \cdot \cancel{\pi r^2}}{\varepsilon_0} \cancel{z}$

$\Rightarrow E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} z \Rightarrow \vec{E}(M) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} z \vec{k}$

5) le potentiel en tout point de l'espace.

on a $\vec{E}(M) = -\vec{grad}\, V(M) = -\frac{dV(M)}{dx}\vec{i} - \frac{dV(M)}{dy}\vec{j} - \frac{dV(M)}{dz}\vec{k}$

$\Rightarrow E \cdot \vec{k} + 0\vec{i} + 0\vec{j} = -\frac{dV(M)}{dx}\vec{i} - \frac{dV(M)}{dy}\vec{j} - \frac{dV(M)}{dz}\vec{k}$

$\Rightarrow E\cancel{\vec{k}} = -\frac{dV(M)}{dz}\cancel{\vec{k}} \Rightarrow dV(M) = -E\, dz$

avec $E = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} z \Rightarrow V(M) = \int dV = \int -E\, dz$

$\Rightarrow V(M) = \int -\frac{\rho}{2\varepsilon} z\, dz = -\frac{\rho}{4\varepsilon} z^2 + cst$

on a $O(0,0,0) \Rightarrow z = 0 \Rightarrow V(0) = 0 = \frac{-\rho}{2\varepsilon} \times 0 + cst$

$\Rightarrow \boxed{cst = 0}$

finalement $V(M) = -\frac{\rho}{4\varepsilon} z^2$

www.rapideway.com/vb

Exercice :

on considère les vecteur $e_1 = (1,0,2)$, $e_2 = (1,-1,3)$ et $e_3 = (1,1,1)$

1 - calculer $2e_1 - e_2$.

2 - La famille $\{e_1, e_2\}$ est-elle libre.

3 - quel est le sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs e_1, e_2 et e_3 ?

1/ on a $2e_1 - e_3 = 2(1,0,2) - (1,-1,3) = (2,0,4) + (-1,+1,-3)$

$= (1,1,1) = e_3$

2/ Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha e_1 + \beta e_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha(1,0,2) + \beta(1,-1,3) = (0,0,0)$

$(\alpha, 0, 2\alpha) + (\beta, -\beta, 3\beta) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ -\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

donc la famille $\{e_1, e_2\}$ est libre. $\Rightarrow \{e_1, e_2\}$ est une base de F

3/ Soit $u(x,y,z) \in F$, donc u s'écrit dans la base $\{e_1, e_2\}$

$u = \alpha e_1 + \beta e_2$

$= \alpha(1,0,2) + \beta(1,-1,3)$

$= (\alpha, 0, 2\alpha) + (\beta, -\beta, 3\beta)$

$u(x,y,z) = (\alpha+\beta, -\beta, 2\alpha + 3\beta)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = -\beta \\ z = 2\alpha + 3\beta \end{cases} \Rightarrow 2x - y = 2\alpha + 2\beta + \beta = 2\alpha + 3\beta = z$$

donc $z = 2x - y \Rightarrow 2x - y - z = 0$

Alors $F = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2x - y - z = 0 \}$

Université Cadi Ayyad
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Semlalia
Marrakech

Filière SMPC
Semestre I, Algèbre I
2006/2007

Contrôle 2 (durée 1h 30)

Exercice 1. (6 points)

On considère les vecteurs $u = (1, 0, 2)$, $v = (1, -1, 3)$ et $w = (1, 1, 1)$.

(1) Calculer $2u - v$.

(2) La famille $\{u, v, w\}$ est-elle libre?

(3) Déterminer la dimension de l'espace $F = \text{vect}\,(u, v, w)$.

Exercice 2. (6 points)

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par:

$f(e_1) = (1, 1, 2)$, $f(e_2) = (-1, 0, -1)$ et $f(e_3) = (0, 1, 1)$.

(1) Calculer $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer une base de $\text{Ker}\,(f)$ et la dimension de $\text{Im}\,(f)$.

(3) Montrer que $\text{Ker}\,(f) = \text{Ker}\,(f^2)$ où $f^2 = f \circ f$.

Exercice 3. (8 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est donnée par:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On considère les vecteurs $u_1 = (1, 0, -1)$, $u_2 = (1, 2, 1)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$.

(1) Montrer que $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ et son inverse P^{-1}.

(3) Déterminer la matrice A_1 de f par rapport à la base $\mathcal{B}_1$.

(4) Calculer A_1^n pour $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer ensuite A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Contrôle N°2 2006/2007
Algèbre SMP / SMC

Exercice I :

on considère les vecteur $u=(1,0,2)$, $v=(1,-1,3)$ et $w=(1,1,1)$

1/ on a $2.u=(2,0,4)$ et $-v=(-1,1,-3)$

$\Rightarrow 2u-v=(2,0,4)+(-1,1,3)=(2-1,0+1,4-3)=(1,1,1)=w$

$\Rightarrow 2u-v=w$

2) puisque $2u-v=w$ donc il existe une relation entre u, v et w et par conséquent la famille $\{u,v,w\}$ n'est pas libre

3/ on a $2u-v=w$

$(u,v,w)\in F \Rightarrow 2u-v=w$

$(u,v,w)=(u,v,2u-v)$

$=\{u(1,0,2)+v(0,1,-1)\}$

$u(1,0,2)+v(0,1,-1)=$
$(u,0,2u)+(0,v,-v)=$
$(u+0,0+v,2u-v)$
$=(u,v,2u-v)$

$F=\text{Vect}\{(1,0,2);(0,1,-1)\}$

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ / $\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\0\\2\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\beta\\-\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+0=0\\0+\beta=0\\2\alpha-\beta=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=0\\\beta=0\end{cases}$

d'où $\alpha=\beta=0$

donc $\{(1,0,2),(0,1,-1)\}$ est libre et par suite $\dim F=\text{card}\,F=2$

Exercice 2 :

soit (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$
et soit l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$f(e_1)=(1,1,2)$, $f(e_2)=(-1,0,-1)$, $f(e_3)=(0,1,1)$

1/ calculons $f(x,y,z)$

1/ on a $f(x,y,z) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3)$

$= x(1,1,2) + y(-1,0,-1) + z(0,1,1)$

$= (x,x,2x) + (-y,0,-y) + (0,z,z)$

$= (x-y\,,\ x+z\,,\ 2x-y+z)$

2/ Déterminons une base de $\ker(f)$.

on a $\ker(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \begin{pmatrix} x-y \\ x+z \\ 2x-y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$\Rightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+z=0 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=+y \\ x=-z \end{cases}$

$\Rightarrow \ker(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x=+y=-z\}$

$= \{(x,+x,-x) / x\in\mathbb{R}\}$

$= \{x(1,+1,-1) / x\in\mathbb{R}\}$

$\ker(f) = \text{vect}\{(1,+1,-1)\}$. ($\ker(f)$ engendré par 1 vecteur $\Rightarrow \dim \ker f = 1$)

$\Rightarrow \dim\ker(f) = 1$

* dimension de $\text{Im}(f)$:

on a $\dim\mathbb{R}^3 = 3 = \dim\ker(f) + \dim\text{Im}(f)$

$\Rightarrow \dim\text{Im}(f) = 3 - \dim\ker f = 3-1 = 2$

on a $f^2 = f\circ f = f(f(x,y,z)) = f(\overset{①}{x-y}, \overset{②}{x+z}, \overset{③}{2x-y+z})$

$= \left((x-y)-(x+z)\,;\ (x-y)+(2x-y+z)\,,\ 2(x-y)-(x+z)+(2x-y+z)\right)$

$= (-y-z\,,\ 3x-2y+z\,,\ 3x-3y)$

$\ker(f^2) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / f^2(x,y,z) = 0\}$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / -y-z=0 \text{ et } 3x-2y+z=0 \text{ et } 3x-3y=0\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y-z=0 \\ 3x-2y+z=0 \\ 3x-3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-z \\ x=y \end{cases} \Rightarrow x=y=-z$$

$$\Rightarrow Ker(f^2) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2 / x=y=-z)\}$$
$$= \{(x,x,-x) \ / \ x\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{x(1,1,-1) \ / \ x\in\mathbb{R}\}$$
$$= Vect\{(1,1,-1)\}$$
$$= Ker(f).$$

Exercice 3:

1/ montrons que $B_1=(u_1,u_2,u_3)$ est base de $\mathbb{R}^3$.

soient α, β et γ trois réels telsque.

$$\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=0$$

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\0\\-\alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\2\beta\\\beta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\gamma\\\gamma\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix}①\\②\\③\end{matrix}\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ 2\beta+\gamma=0 \\ -\alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ①' \ 2\beta+2\gamma=0 \quad (①+③) \\ ②' \ 2\beta=\gamma \\ ③' \ -\alpha+\beta+\gamma=0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} ①'-②' \Rightarrow 2\gamma-\gamma=0 \Rightarrow \boxed{\gamma=0} \\ ②' \Rightarrow 2\beta=0 \Rightarrow \boxed{\beta=0} \\ ③' \Rightarrow -\alpha+0+0=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=0} \end{array}\right\} \Rightarrow \gamma=\alpha=\beta=0$$

on a $\dim B_1 = 3 = \dim\mathbb{R}^3$ et $\{u_1,u_2,u_3\}$ est libre

donc B_1 est une base de $\mathbb{R}^3$

2ème Méthode: on utilise la détérminon pour montrer que $B_1=(u_1,u_2,u_3)$ est libre

$$\det B_1 = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1&1&1\\0&2&1\\-1&1&1 \end{vmatrix} \end{array} = 1\times\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}0&1\\-1&1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}0&2\\-1&1\end{vmatrix}$$
$$=(2-1)-(+1)+(+2) = 1-1+2 = 2 \neq 0$$

comme $\det B_1\neq 0$ Alors B_1 est libre.

et comme $\dim B_1 = 3 = \dim\mathbb{R}^3$ donc B_1 est une base de $\mathbb{R}^3$

2/ la matrice de passage P de B a B_1

(5)

on a $u_1 = (1,0,-1) = e_1 + 0e_2 - e_3$
$u_2 = (1,2,1) = e_1 + 2e_2 + e_3$
$u_3 = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3$

la matrice de passage P de B à B_1 est formée des vecteur donnés u_1, u_2 et u_3

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ P = & \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array}$$

* la matrice inverse P^{-1} de P

pour trouver la matrice inverse P^{-1}, il suffit de calculer les composante de vecteurs e_1, e_2 et e_3 par rapport à B_1 (en fonction de u_1, u_2 et u_3)

on a $u_1 = e_1 - e_3$ ①
$u_2 = e_1 + 2e_2 + e_3$ ②
$u_3 = e_1 + e_2 + e_3$ ③

②-③ $\Rightarrow u_2 - u_3 = e_2$

①+② $\Rightarrow u_1 + u_3 = 2e_1 + e_2$
$\Rightarrow u_1 + u_3 = 2e_1 + u_2 - u_3$
$u_1 + u_3 - u_2 + u_3 = 2e_1$
$\Rightarrow e_1 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + u_3$

① $\Rightarrow -e_3 = u_1 - e_1 \Rightarrow e_3 = e_1 - u_1$ avec $e_1 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + u_3$

$\Rightarrow e_3 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + u_3 - u_1 = -\frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + u_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + u_3 \\ e_2 = 0.u_1 + u_2 - u_3 \\ e_3 = -\frac{1}{2}u_1 - \frac{1}{2}u_2 + u_3 \end{cases} \Rightarrow P^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

3/ la matrice A_1 de f par rapport à la base B_1

est: $A_1 = P^{-1} A P$

④

$$A_1 = \begin{pmatrix} +\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

méthode de calcul:

<u>Exemple</u> : $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d \end{pmatrix}$

calculer $B.C$

$$B.C = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}$$

avec $E = (a, c)\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + cb'$

$F = (a, c)\begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} = ac' + cd'$

$G = (b, d)\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = ba' + db'$

$H = (b, d)\begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix} = bc' + dd'$

* * * * *

$0\times1 + (1)\times0 + 2\times(-1)$

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}}_{A.P}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4/ calculons A_1^n

$$A_1^2 = A_1 A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{2^2}{4} & 0 & \overset{-(2\times2+2)}{-6} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_1^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$(-2)^3$ $\quad$ $2\times 6+2$ $\quad$ $-(14\times 2+2)$ $\quad$ 2^4

$$A_1^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$A_1^n = \begin{pmatrix} (-1)^n \cdot 2^n & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

* calculons A^n

on a $A_1 = P^{-1} A P \Rightarrow A_1^n = P^{-1} A^n P$

$$\Rightarrow A^n = P A_1^n P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n 2^n & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n 2^n & 0 & \\ 0 & 0 & (-1)^n \\ -(-1)^n 2^n & 0 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ -1/2 & 1 & -1/2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n & -(-1)^n & (-1)^n \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Université Cadi Ayyad
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Semlalia
Marrakech

Filière SMPC
Semestre I, Algèbre I
2005/2006

Contrôle 2 (durée 1h 30)

Exercice 1. (3 points)

On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$.

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer une base.

(2) Déterminer un sous-espace vectoriel supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. (5 points)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer A^2 en fonction de A et de I_2 où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Montrer que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $MA^2 = A^2M \Leftrightarrow MA = AM$.

(3) Calculer A^8.

Exercice 3. (12 points)

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f(e_1) = (1, 0, 2), \quad f(e_2) = (0, 1, 1) \quad \text{et} \quad f(e_3) = (1, -2, 0).$$

(1) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $f(x, y, z)$.

(2) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(3) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

(4) Soient $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 0)$.
Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(5) Déterminer la matrice de passage, $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer son inverse.

(6) Déterminer la matrice $\mathrm{mat}(f; \mathcal{B}')$ de f par rapport à la base $\mathcal{B}'$.

contrôle N° 2 2005/2006
Algèbre SMP/SMC

Exercice 1 :

On considère l'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0\}$

1/ Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* on a $(0,0,0) \in F$ car $0+0+0=0$
  $\Rightarrow F \neq \emptyset$
* Soient $u(x,y,z) \in F$ et $v(x',y',z') \in F$
  $u \in F \Rightarrow x+y+z=0$
  $v \in F \Rightarrow x'+y'+z'=0$
  $u+v = (x+y+z)+(x'+y'+z') = 0$
  $= (x+x')+(y+y')+(z+z') = 0$
  d'où $u+v \in F$
* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u(x,y,z) \in F$
  $\lambda u = \lambda(x+y+z) = 0$
  $= (\lambda x)+(\lambda y)+(\lambda z) = 0$
  d'où $\lambda u \in F$

Conclusion F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

* cherchons une base de F.

on a $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z=0\}$
$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = -x-y\}$
$= \{(x,y,-x-y) / x,y \in \mathbb{R}\}$
$= \{x(1,0,-1)+y(0,1,-1) / x,y \in \mathbb{R}\}$
$= \text{vect}\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ / $\alpha(1,0,-1)+\beta(0,1,-1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha,0,-\alpha)+(0,\beta,-\beta) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+0=0 \\ 0+\beta=0 \\ -\alpha-\beta=0 \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0$$

donc $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ est libre est par la suite

$\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ est une base de F

2) Déterminons un sous-espace vectoriel supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^3$

Soit G un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par le vecteur $w=(1,1,2)$ (choix)

on a $(x,y,z) \in F$ si et seulement si $x+y+z=0 \Rightarrow z=-x-y$

et $(x,y,z) \in G$ si et seulement si $2z = x = y$

Donc $(x,y,z) \in F \cap G$ si et seulement si $x=y=z=0$

d'où $F \cap G = \{0\}$

on a $\left\{\begin{array}{l} \dim F + \dim G = 2+1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \\ F \cap G = \{0\} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{R}^3 = F \oplus G$

Alors G est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$

Exercice 2 : on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1/ calculons A^2

on a $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_2}$

$\Rightarrow A^2 = A + I_2$

2/ Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

on a $A^2 = A + I_2$

$MA^2 = M(A+I_2)$

$MA^2 = MA + MI_2$

on a $MA = AM$ et $MI_2 = I_2M$

$\Rightarrow MA^2 = AM + I_2M$

$MA^2 = (\underbrace{A+I_2}) M$

$MA^2 = A^2M$

on a $A^2 = A + I_2$

$\Rightarrow A = A^2 - I_2$

$MA = M(A^2 - I_2)$

$= MA^2 - MI_2$

on a $MA^2 = A^2M$ et $MI_2 = I_2M$

$\Rightarrow MA = A^2M - I_2M$

$= (A^2 - I_2)M$

$MA = AM$

finalement $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $MA^2 = A^2M \Leftrightarrow MA = AM$.

3/ calculons A^8

on a $A^4 = A^2 A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

donc $A^8 = A^4 A^4 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & 35 \\ 21 & 19 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

avec $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2(0,1,0)$ et $e_3(0,0,1)$

et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$f(e_1) = (1,0,2)$; $f(e_2) = (0,1,1)$ et $f(e_3) = (1,-2,0)$

1/ calculons $f(x,y,z)$.

Soit A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) = A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y-2z \\ 2x+y \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f(x,y,z) = (x+z, y-2z, 2x+y)$

ou bien $f(x,y,z) = x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3)$

$= x(1,0,2) + y(0,1,1) + z(1,-2,0)$

$= (x,0,2x) + (0,y,y) + (z,-2z,0)$

$= (x+z, y-2z, 2x+y)$

2/ * base de $\mathrm{Ker}(f)$

on a $\mathrm{Ker}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \begin{pmatrix} x+z \\ y-2z \\ 2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$$\ker(f) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \ x+z=0 \text{ et } y-2z=0 \text{ et } 2x+y=0\}$$
$$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / \ x=-z \text{ et } y=2z\}$$
$$= \{(-z,2z,z) \ / \ z\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{z(-1,2,1)\}$$
$$= \text{vect}\{(-1,2,1)\}$$

donc $(-1,2,1)$ est une base de $\ker(f)$ et $\dim\ker(f)=1$

* base de $\mathrm{Im}(f)$

Soit $(x',y',z')\in\mathrm{Im}(f) \Rightarrow \exists (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tels que $f(x,y,z)=(x',y',z')$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+z=x' \\ y-2z=y' \\ 2x+y=z' \end{cases} \Rightarrow \quad 2x'+y' = 2x+\cancel{2z}+y-\cancel{2z}$$
$$= 2x+y$$
$$= z'$$

donc $z'=2x'+y'$

$$\Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \{(x',y',z')\in\mathbb{R}^3 / \ z'=2x'+y'\}$$
$$= \{(x',y',2x'+y') \ / \ x',y'\in\mathbb{R}\}$$
$$= \{x'(1,0,2)+y'(0,1,1) \ / \ x',y'\in\mathbb{R}\}$$
$$= \text{vect}\{(1,0,2),(0,1,1)\}$$

donc $\{(1,0,2),(0,1,1)\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $\dim\mathrm{Im}(f)=2$

3) on a $\det\{(-1,2,1),(1,0,2),(0,1,1)\} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= -1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$= 2-1 = 1 \neq 0$$

donc $\ker(f)\cap\mathrm{Im}(f)=\{0\}$

de plus $\dim\ker(f)+\dim\mathrm{Im}(f) = 1+2=3=\dim\mathbb{R}^3$

d'où $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont deux sous-espace supplémentaire de $\mathbb{R}^3$.

4/ Soient $u_1 = (1,1,1)$, $u_2 = (1,-1,0)$, $u_3 = (1,0,0)$

* Montrons que $\{u_1, u_2, u_3\}$ est libre

$\det B' = \det(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 + 1 = 1 \neq 0$

$\det \neq 0 \Rightarrow B'$ est libre

on a $B' = (u_1, u_2, u_3) \Rightarrow \dim B' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

comme B' est libre et $\dim B' = \dim \mathbb{R}^3$ Alors B' est une base de $\mathbb{R}^3$

ou bien :

Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$

$\Rightarrow \alpha(1,1,1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(1,0,0) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha, \alpha, \alpha) + (\beta, -\beta, 0) + (\gamma, 0, 0) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 & \longrightarrow 0 + 0 + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 & \longrightarrow 0 - \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \alpha = 0 & \longrightarrow \alpha = 0 \end{cases}$

comme $\alpha = \beta = \gamma = 0$ Alors B' est libre.

de plus $\dim B' = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ Alors B' est une base de $\mathbb{R}^3$.

5) la matrice de passage $P_{B,B'}$

$$P_{B,B'} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \end{array} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \qquad \begin{cases} u_1 = (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3 \\ u_2 = (1,-1,0) = e_1 - e_2 + 0e_3 \\ u_3 = (1,0,0) = 1e_1 + 0e_2 + 0e_3 \end{cases}$$

$$P_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* Calculons $P^{-1}_{B,B'}$

on a $\begin{cases} u_1 = e_1 + e_2 + e_3 & (1) \\ u_2 = e_1 - e_2 & (2) \\ u_3 = e_1 & (3) \end{cases}$ $\quad (2) \Rightarrow -e_2 = u_2 - e_1 \Rightarrow e_2 = e_1 - u_2$

$\Rightarrow_{(2)'} \boxed{e_2 = u_3 - u_2}$ ($u_3 = e_1$ équation (3))

(3) et (2)' dans (1) $\Rightarrow u_1 = e_1 + u_3 - u_2 + u_3 \Rightarrow \boxed{e_1 = u_1 + u_2 - 2u_3}$

$\Rightarrow \begin{cases} e_1 = u_1 + u_2 - 2u_3 \\ e_2 = -u_2 + u_3 \\ e_3 = u_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = (1, 1, -2) \\ e_2 = (0, -1, 1) \\ e_3 = (0, 0, 1) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad P^{-1}_{BB'} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}$$

6/ Déterminons la matrice $mat(f;B')$

on a $\quad mat(f;B') = P^{-1}_{BB'}\, mat(f;B)\, P_{BB'}$

avec $\quad mat(f;B) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \end{array} \qquad \begin{cases} f(e_1) = (1,0,2) \\ f(e_2) = (0,1,1) \\ f(e_3) = (1,-2,0) \end{cases}$

donc $\quad mat(f;B') = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

http://www.rapideway.com/vb

Université Cadi Ayyad
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences Semlalia
Marrakech

Filière SMPC
Semestre I, Algèbre I
2006/2007

Contrôle Rattrapage (durée 1h 30)

Exercice 1. (6 points)

On considère l'ensemble $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$.

(1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer une base de F.

(3) Soient $u = (1, 1, 1)$ et $G = \text{vect}(u)$. Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2. (10 points)

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $f(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

(2) Déterminer une base de $\text{Ker}(f)$ et la dimension de $\text{Im}(f)$.

Soient $u_1 = (0, 0, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ et $u_3 = (2, -1, 0)$.

(3) Montrer que la famille $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(4) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_1$ et son inverse P^{-1}.

(5) Déterminer la matrice A_1 de f par rapport à la base $\mathcal{B}_1$.

Exercice 3. (4 points)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) Déterminer la matrice B telle que $A = B + I_3$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

(2) Calculer B^2 et B^3.

(3) Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Contrôle Rattrapage
Algèbre I

2006/2007
SMP/SMC

Exercice 1 :

on considère l'ensemble $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$

1/ Montrons que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

* $F \neq \emptyset$ car on a $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow 2 \times 0 - 0 + 0 = 0$
* Soient $u(x,y,z) \in F$ et $v(x',y',z') \in F$

$u \in F \Rightarrow 2x - y + z = 0$

$v \in F \Rightarrow 2x' - y' + z' = 0$

$u + v = (2x - y + z) + (2x' - y' + z') = 0$

$= (2x + 2x') - (y + y') + (z + z') = 0$

$= 2(x + x') - (y + y') + (z + z') = 0$

d'où $u + v \in F$

* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u(x,y,z) \in F$

$\lambda u = \lambda(2x - y + z) = 0$

$= (2\lambda x - \lambda y + \lambda z) = 0$

$\Rightarrow \lambda u \in F$

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$

2/ Déterminons une base de F

on a $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y + z = 0\}$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z = -2x + y\}$

$= \{(x, y, -2x + y) / x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,0,-2) + y(0,1,1) / x, y \in \mathbb{R}\}$

$= \text{vect}\{(1,0,-2), (0,1,1)\}$

soient α e $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha(1,0,-2) + \beta(0,1,1) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha, 0, -2\alpha) + (0, \beta, \beta) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -2\alpha + \beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

c/c $\{(1,0,-2),(0,1,1)\}$ est une base de F et $\dim F = 2$.

3/ Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$

Soit $(x,y,z) \in F \Rightarrow 2x - y + z = 0$

et $(x,y,z) \in G \Rightarrow x = y = z$

Soit $(x,y,z) \in F \cap G \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x = y = z \end{cases} \Rightarrow 2x - x + x = 0 \Rightarrow x = y = z = 0$

donc $F \cap G = (0,0,0)$

et $\dim F + \dim G = 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

d'où $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Exercice 2:

soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice par rapport à la base canonique. $B(e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est donnée par:

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc|c} & & & \\ \end{array}$$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(e_1) & f(e_2) & f(e_3) \end{array} & \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{l} e_1 = (1,0,0) \\ e_2 = (0,1,0) \\ e_3 = (0,0,1) \end{array}$$

1/ calculons $f(x,y,z)$

$(x,y,z) \in f \Rightarrow f(x,y,z) = x\,f(e_1) + y\,f(e_2) + z\,f(e_3)$

avec $f(e_1) = (2,0,3)$, $f(e_2) = (1,-1,1)$, $f(e_3) = (1,1,2)$

$$f(x,y,z) = x(2,0,3) + y(1,-1,1) + z(1,1,2)$$
$$= (2x, 0, 3x) + (y, -y, y) + (z, z, 2z)$$
$$= (2x+y+z, -y+z, 3x+y+2z)$$

2) base de $\ker(f)$

on a $\ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^3}\}$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (2x+y+z, -y+z, 3x+y+2z) = (0,0,0)\}$$
$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underset{(1)}{2x+y+z=0} \text{ et } \underset{(2)}{-y+z=0} \text{ et } \underset{(3)}{3x+y+2z=0}\}$$

on a (1) $\Rightarrow y = z$ et (2) dans (1) $\Rightarrow 2x + y + y = 0 \Rightarrow x = -y$

$\Rightarrow x = -y = -z$

donc $Ker(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = -y = -z\}$

$= \{(x,-x,-x) \,/\, x \in \mathbb{R}\}$

$= vect\{(1,-1,-1)\}$ $\quad \dim Ker(f) = 1$

$\{(1,-1,-1)\}$ est une base de $Ker(f)$.

* dimension de $Im(f)$

on a $\dim \mathbb{R}^3 = \dim ker(f) + \dim Im(f)$

$\Rightarrow \dim(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim ker(f)$

$= 3 - 1 = 2$.

3) Montrons que B_1 est une base de $\mathbb{R}^3$

Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = 0$

$\Rightarrow \alpha(0,0,1) + \beta(1,-1,1) + \gamma(2,-1,0) = (0,0,0)$

$(0,0,\alpha) + (\beta,-\beta,\beta) + (2\gamma,-\gamma,0) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (0+\beta+2\gamma,\ 0-\beta-\gamma,\ \alpha+\beta+0) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta + 2\gamma = 0 & (1) \\ -\beta - \gamma = 0 & (2) \\ \alpha + \beta = 0 & (3) \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

on a la famille B_1 est libre, de plus $\dim B_1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Alors B_1 est une base de $\mathbb{R}^3$.

4/ la matrice de passage P de B à B_1

on a $u_1 = (0,0,1) = 0e_1 + 0e_2 + e_3$

$u_2 = (1,-1,1) = e_1 - e_2 + e_3$

$u_3 = (2,-1,0) = 2e_1 - e_2 + 0e_3$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

* la matrice inverse P^{-1}

$$\text{on a } \begin{cases} \boxed{u_1 = e_3} & (1) \\ u_2 = e_1 - e_2 + e_3 & (2) \\ u_3 = 2e_1 - e_2 & (3) \end{cases}$$

(3) $\Rightarrow e_2 = 2e_1 - u_3$

(2) $\Rightarrow e_2 = e_1 + e_3 - u_2 = u_1 + e_1 - u_2$

(3) = (2) $\Rightarrow \boxed{e_1 = u_1 - u_2 + u_3}$

(3) $\Rightarrow e_2 = 2e_1 - u_3 \Rightarrow e_2 = 2u_1 - 2u_2 + 2u_3 - u_3 = 2u_1 - 2u_2 + u_3$

$\Rightarrow \boxed{e_2 = 2u_1 - 2u_2 + u_3}$

donc $\begin{cases} e_1 = u_1 - u_2 + u_3 = (1,-1,1) \\ e_2 = 2u_1 - 2u_2 + u_3 = (2,-2,1) \\ e_3 = u_1 = (1,0,0) \end{cases} \Rightarrow P^{-1} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{array} \end{array}$

5/ la matrice A_1 de f par rapport à la base B_1

on a $A_1 = P^{-1} A P$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ -3 & -6 & -5 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

1/ Déterminons la matrice B :

on a $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{B} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{I_3} = B + I_3$

$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) on a $B^2 = B.B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

on a $B^3 = B^2 . B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$

3)

on a $A = B + I_3 \Rightarrow A^n = (B + I_3)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k B^k I_3^{n-k}$

$A^n = \sum_{k=1}^{2} C_2^k B^k I_3^{2-k} + \sum_{k=3}^{n} \underbrace{C_n^k B^k I^{n-k}}_{0}$

pour $k = 3$ on a $B^3 = 0$

Exercices

calculer les limite suivantes :

1/ $$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \right)$$

2) $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{4n^3} \left(1 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 \right)$$

3) $$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right)$$

4) $$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1^2 n}} + \frac{2}{\sqrt[3]{n^3+2^2 n}} + \cdots + \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n^2 n}} \right)$$

5) déterminer la valeur moyenne de

i) $tg\, x$ entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$

Exercice 1 :

1/ on a $\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\;\frac{1}{n(1+\frac{1}{n})} + \frac{1}{n(1+\frac{2}{n})} + \dots + \frac{1}{n(1+\frac{n}{n})}$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{b-a}{n}} \left(\frac{1}{1+\left(\frac{1}{n}\right)} + \underbrace{\frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}}_{f\left(\frac{k}{n}\right)} \right)$$

x

c'est la somme de Rieman Relative à la fonction $f(x)=\frac{1}{1+x}$

et la subdivision $\sigma_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots ; \frac{n}{n}\}$

$f(x)$ est continue sur $[0,1]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{n+1} = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln(2)-\ln(1)$

$= \ln 2$

on a $\frac{1}{n} = \frac{b-a}{n}$
pour $a=0$
$b-a=1$
$\Rightarrow b=1$
$a=0$ et $b=1$
$[a,b]=[0,1]$

2/ $u_n = \frac{1}{4n^3}\left(1+3^2+\dots+(2n-1)^2\right) = \frac{1}{n}\times\frac{1}{(2n)^2}\left(1+3^2+\dots+(2n-1)^2\right)$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{b-a}{n}}\left(\left(\underbrace{\frac{1}{2n}}_{x}\right)^2+\left(\frac{3}{2n}\right)^2+\dots+\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2\right)$$

c'est la somme de Rieman Relative à la fonction $f(x)=x^2$

et la subdivesion $\sigma_i = \frac{2i-1}{2n}$

$f(x)$ est continue sur $[0,1]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

3) on a $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} = \frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}} + \frac{1}{\sqrt{n^2(1+\frac{2^2}{n^2})}} + \dots$

$= \frac{1}{n\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{1}{n\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}$; $\forall n>0$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{b-a}{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\underbrace{\frac{1}{n}}_{x}\right)^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$

c'est la somme de Riemann relative a la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

et la subdivision $\sigma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}\right\}$

$f(x)$ est continue sur $[0,1]$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left[\operatorname{Argsh}(x)\right]_0^1$$

on a $\operatorname{Argsh}(x) = \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ (cours)

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \left[\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 = \log\left(1+\sqrt{2}\right) - \log(\sqrt{1})$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = \log(1+\sqrt{2})$$

4/ on a $v_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3 + 1^2 n}} + \frac{2}{\sqrt[3]{n^3 + 2^2 n}} + \dots + \frac{n}{\sqrt[3]{n^3 + n^2 . n}}\right)$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{1^2}{n^2}\right)}} + \frac{2}{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)}} + \dots + \frac{n}{\sqrt[3]{n^3\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)}}\right)$$

$\left(\sqrt[3]{n^3} = n^{3/3} = n\right)$

$$= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}} + \frac{2}{n\sqrt[3]{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \dots + \frac{n}{n\sqrt[3]{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$

$\sqrt[3]{n^3}$

$$= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{b-a}{n}}\left(\frac{\overbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}^{x}}{\sqrt[3]{1+\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{x}^2}} + \frac{\frac{2}{n}}{\sqrt[3]{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}} + \dots + \frac{\frac{n}{n}}{\sqrt[3]{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right)$$

c'est la somme de Riemann relative a la fonction $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}}$

et la subdivision $\sigma_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \frac{n}{n}\right\}$

$f(x)$ est continue sur l'intervale $[0,1]$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)^{1/3}}$$

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)^{1/3}} = \int_0^1 x\left(1+x^2\right)^{-1/3}$$

on pose $u = 1+x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$ et $u = 1+x^2 \Rightarrow x = \sqrt{u-1}$

les bornes $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = 2 \end{cases}$; $du = 2x\,dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} = \frac{du}{2\sqrt{u-1}}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x\,dx}{(1+x^2)^{1/3}} = \int_1^2 \frac{\cancel{\sqrt{u-1}} \times du}{2\cancel{\sqrt{u-1}} \cdot u^{1/3}} = \int_1^2 \frac{du}{2u^{1/3}} = \frac{1}{2}\int_1^2 u^{-1/3}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(-\frac{1}{3})} u^{1+(-\frac{1}{3})}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} u^{2/3}\right]_1^2$$

$$= \frac{3}{4}\left(2^{2/3} - 1^{2/3}\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{4} - 1\right)$

4/

la valeur moyenne d'une fonction f sur $[a,b]$ est le nombre $c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

on a donc :

i/ $$c_1 = \frac{1}{\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg} x \, dx = \frac{6}{\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

on pose $\cos x = u \Rightarrow du = -\sin x\,dx \Rightarrow dx = \frac{-du}{\sin x}$

$$\begin{cases} x = \pi/3 \Rightarrow u = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ x = \pi/6 \Rightarrow u = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} u > 0 \\ \text{sinon } |u| \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{6}{\pi}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1/2} \frac{-\cancel{\sin x}\,du}{\cancel{\sin x} \cdot u} = \frac{6}{\pi}\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1/2} -\frac{du}{u} = -\frac{6}{\pi}\left[\ln u\right]_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1/2}$$

$$c_1 = -\frac{6}{\pi}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = +\frac{6}{\pi}\left(\ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{1}{2}\right)$$

$$c_1 = \frac{6}{\pi}\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{1}\right) = \frac{6}{\pi}\ln\sqrt{3}$$

Intégration par changement de variable

Exemple : $I = \int_{x=0}^{x=1} \frac{2x\,dx}{\underbrace{1+x^2}_{u}}$

on pose $\begin{cases} u = 1+x^2 \Rightarrow du = d(1+x^2) = 2x\,dx \\ \Rightarrow x = \sqrt{u-1} \end{cases}$

$du = 2x\,dx$ avec $x = \sqrt{u-1} \Rightarrow \left| dx = \frac{du}{2x} = \frac{du}{2\sqrt{u-1}} \right.$

les bornes $\begin{cases} x = 0 \Rightarrow u = 1+0^2 = 1 \\ x = 1 \Rightarrow u = 1+1^2 = 2 \end{cases}$

remplaçons dans l'intégral.

$$I = \int_{u=1}^{u=2} \frac{\cancel{2} \times \cancel{\sqrt{u-1}}}{u} \times \frac{du}{\cancel{2\sqrt{u-1}}} = \int_1^2 \frac{du}{u} = \left[\ln u \right]_1^2$$

$\Rightarrow I = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

Intégration par partie.

Exemple : $J = \int_0^1 \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^x}_{v'} \, dx$

on a $\begin{cases} u = x \Rightarrow u' = 1 \\ v' = e^x \Rightarrow v = e^x \end{cases}$

$$\Rightarrow J = \left[uv \right]_0^1 - \int_0^1 u'v \, dx$$

donc $J = \left[e^x \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x \, dx$

$$J = (e^1 - 0) - \left[e^x \right]_0^1$$

$$J = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1$$

$$J = 1$$

Primitives d'une fraction rationnelle

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, si $g(x)$ admet des racines

donc on décompose en éléments simple sur $\mathbb{R}$.

Exemple : $I = \int \frac{x}{x^2-1}\,dx$

$h(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{x}{(x+1)(x-1)} = E + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1}$ avec E la partie entière

$E = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2-1} = \lim_{\infty} \frac{x}{x^2} = 0$ (si $d^\circ f(x) \leqslant d^\circ g(x)$ on utilise la limite, si non fite la division euclidienne

pour trouver a :

$(x+1)h(x) = \frac{x}{(x-1)} = a + (x+1)\left(\frac{b}{x-1}\right)$

pour $x = -1 \Rightarrow \frac{1}{2} = a + 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$

pour trouver b :

$(x-1)\,h(x) = \frac{x}{x+1} = (x-1)\frac{a}{(x+1)} + b$

$x = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = b$

$\Rightarrow \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$

$\Rightarrow \int \frac{x\,dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$

* $J = \int \frac{dx}{x^2+bx+c}$

si $\Delta = b^2 - 4c > 0 \rightarrow$ décomposion en éléments simple sur $\mathbb{R}$

si $\Delta < 0 \rightarrow$

on a $x^2+bx+c = x^2+bx+\frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = \underbrace{(x+\frac{b}{2})}_{S}{}^2 + \underbrace{c - \frac{b^2}{4}}_{r^2}$

on pose $\begin{cases} S = x + \frac{b}{2} \Rightarrow dS = dx \\ r^2 = c - \frac{b^2}{4} \end{cases} \Rightarrow J = \int \frac{dS}{S^2+r^2} = \int \frac{dS}{(\frac{S^2}{r^2}+1)r^2}$

$\Rightarrow J = \frac{1}{r^2}\int \frac{dS}{(\frac{S}{r})^2+1} = \frac{1}{r^2}\,\mathrm{artg}\,S + c$

Exemple: calculer $I = \int \frac{dx}{x^2+x+1}$

on a $x^2+x+1 = x^2+x+\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$

$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$

on pose $u = x+\frac{1}{2} \Rightarrow du = dx$

$\Rightarrow I = \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{du}{\frac{3}{4}\left(\frac{4u^2}{3}+1\right)} = \frac{4}{3}\int \frac{du}{\left(\frac{2u}{\sqrt{3}}\right)^2+1}$

on pose $\frac{2}{\sqrt{3}}u = X \Rightarrow dX = \frac{2}{\sqrt{3}}du \Rightarrow du = \frac{\sqrt{3}}{2}dX$

$\Rightarrow I = \frac{4}{3}\int \frac{\sqrt{3}/_2\, dX}{X^2+1} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{dX}{1+X^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{Artg}\,X + c$

on a $X = \frac{2}{\sqrt{3}}u$ et $u = x+\frac{1}{2} \Rightarrow X = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow I = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{Artg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] + c.$

Primitives d'une fraction rationnelle en sin et cos.

on pose $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x$

si na marche pas, on fait généralement le changement de variable

$t = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$ alors $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

et $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

identitées:

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\sin 2x = 2\cos x \sin x$

$\sin a.\cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)+\sin(a-b)\right)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos^2 x)$

$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Exemple: 1 calculer $I = \int \cos^3 x \sin 2x \, dx$

on a $\sin 2x = 2 \cos x \sin x$

$\Rightarrow I = \int 2 \times \cos^4 x \sin x \, dx$

on pose $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x \, dx \Rightarrow dx = \frac{-1}{\sin x} du$

$\Rightarrow I = 2 \int \cos^4 x \times \cancel{\sin x} \times \frac{-du}{\cancel{\sin x}} =$

$= -2 \int u^4 \, du = -2 \left[\frac{u^5}{5} \right] + c$

avec $u = \cos x \Rightarrow I = -\frac{2}{5} \cos^5 x + c$

Exemple 2:

calculer $J = \int \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$

on a $\sin 2x = 2 \cos x \sin x \Rightarrow I = \int \frac{2 \sin x \cos x}{1 + \cos^2 x} dx$

on pose $u = \cos x \Rightarrow du = -\sin x dx \Rightarrow dx = \frac{-du}{\sin x}$

$\Rightarrow J = 2 \int \frac{u \cdot \cancel{\sin x}}{1 + u^2} \cdot \frac{-du}{\cancel{\sin x}} = \int -\frac{2u \cdot du}{1 + u^2}$

on pose $1 + u^2 = t \Rightarrow dt = 2u \, du \Rightarrow du = \frac{dt}{2u} = \frac{dt}{2\sqrt{t-1}}$

$1 + u^2 = t \Rightarrow u = \sqrt{t-1}$

$\Rightarrow J = \int -\frac{2\cancel{\sqrt{t-1}}}{t} \times \frac{dt}{2\cancel{\sqrt{t-1}}} = \int -\frac{dt}{t} = -\ln t + c$

puisque $t = 1 + u^2$ et $u = \cos x \Rightarrow t = 1 + \cos^2 x$

donc $J = -\ln(1 + \cos^2 x) + c$

Exemple 3

calculer $I = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + \sin x}$

on pose $\begin{cases} t = tg \frac{x}{2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{cases} \Rightarrow dx = \frac{2 \, dt}{1+t^2}$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dt}{1+t^2} \times \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \cancel{\frac{1}{2}}\int \frac{\cancel{2}\,dt}{\cancel{1+t^2}} \times \frac{1}{\frac{1+t^2+2t}{\cancel{1+t^2}}}$$

$$I = \int \frac{dt}{t^2+2t+1} = \int \frac{dt}{(1+t)^2}$$

on pose $1+t = u \Rightarrow dt = du$

$$\Rightarrow \quad I = \int \frac{du}{u^2} = \frac{1}{u} + c$$

on a $u = 1+t$ et $t = tg\,\frac{x}{2} \Rightarrow u = 1 + tg\,\frac{x}{2}$

Alors $I = \dfrac{1}{1+tg\,\frac{x}{2}} + c$

<u>Exemple</u> 4 calculer $J = \int \cos^4 x \, dx$

on a $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$, avec $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$$\Rightarrow \cos^4 x = \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$$

$$\Rightarrow J = \int \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\right) dx$$

$$= \int \frac{3}{8}\,dx + \int \frac{1}{2}\cos 2x \, dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x \, dx$$

$$\left(\text{avec } \int \cos ax \, dx = \frac{1}{a}\sin ax + c\right)$$

$$\Rightarrow J = \frac{3}{8}x + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\times\frac{1}{4}\sin 4x + c$$

$$J = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 4x + c$$

primitive d'une fraction rationnelle en x et $\sqrt{ax^2+bx+c}$

$$I = \int \frac{dx}{\left(\sqrt{ax^2+bx+c}\right)^n} \quad , \text{ avec } \Delta = b^2-4ac$$

si $\Delta \geq 0$ on pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\alpha)t$

où $\sqrt{ax^2+bx+c} = (x-\beta)t$

avec $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Si $\Delta < 0$

on pose $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}\,x \pm t$ si $a>0$

ou bien $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$ si $a<0$

$c>0$

Exemple 1°: calculer $J = \displaystyle\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}$

on pose $\sqrt{x^2+2x+2} = x+t$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}+2x+2 = (x+t)^2 = \cancel{x^2}+2xt+t^2$$

$$\Rightarrow 2x-2xt = t^2-2$$

$$\Rightarrow 2x(1-t) = t^2-2 \quad \Rightarrow x = \frac{t^2-2}{2(1-t)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\,\frac{t^2-2}{-(t+1)} = \frac{-1}{2}\left(t+1-\frac{1}{t-1}\right) \leftarrow (1)$$

$$\Rightarrow \boxed{dx = \frac{-1}{2}\left(1+\frac{1}{(t-1)^2}\right)dt} \leftarrow (2)$$

$$x+\underbrace{\sqrt{x^2+2x+2}}_{x+t} = x+x+t = 2x+t$$

(3)

$$= -\left(t+1-\frac{1}{t-1}\right)+t = \cancel{-t}-1+\frac{1}{t-1}+\cancel{t}$$

(1)

$$\Rightarrow J = \int \frac{\overset{(2)}{dx}}{\underset{(3)}{x+\sqrt{x^2+2x+2}}} = \int \frac{-1}{2}\left(1+\frac{1}{(t-1)^2}\right)dt \times \frac{1}{-1+\frac{1}{(t-1)}}$$

$$\Rightarrow \quad J = -\frac{1}{2}\int \frac{(t-1)^2+1}{(t-1)^{\cancel{2}}} \times \frac{\cancel{(t-1)}}{2-t}\, dt = -\frac{1}{2}\int \frac{(t-1)^2+1}{(t-1)(2-t)}\, dt$$

$$\frac{(t-1)^2+1}{(t-1)(2-t)} = \frac{t-1}{(2-t)} + \frac{1}{(t-1)(2-t)}$$

décomposition en élément simpl

$$= \frac{t-1}{2-t} - \frac{1}{t-1} + \frac{1}{t-2}$$

décomposition en élément simple

$$= -1 + \cancel{\frac{1}{2-t}} - \frac{1}{t-1} + \cancel{\frac{1}{t-2}} = -\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad J = -\frac{1}{2}\int -\left(1 + \frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1}$$

$$J = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}\ln|t-1| + c = \frac{1}{2}\left(t + \ln|t-1|\right) + c$$

avec $\sqrt{x^2+2x+2} = x + t \Rightarrow t = \sqrt{x^2+2x+2} - x$

$$\Rightarrow \quad J = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+2x+2} - x + \ln\left|\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1)\right|\right) + c$$

www.rapideway.com/vb

Calculer les intégrales suivant :

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}. \qquad \int_1^2 \frac{x^3\,dx}{(1+x^4)^2}. \qquad \int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}}.$$

$$\int_1^2 \frac{dt}{t(1+t)},\ \text{puis} \int_1^2 \frac{\text{Log}\,(1+t)}{t^2}\,dt. \qquad \int_{-1}^{0} \frac{x}{x^2+2x-3}\,dx.$$

On pose, pour tout entier naturel n, non nul,

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx.$$

1° Montrer que I_n existe et est un nombre strictement positif.
Calculer I_1 .

2° Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)\,I_n$.

Calculer alors I_2 et I_3 .

3° En déduire la valeur de $I = \int_0^1 (-x^3 + 2x^2 - x)\,e^{-x}\,dx.$

Calculer les intégral

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,\text{Arc tg}\,x\,dx. \qquad \int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx. \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin^2 x\,dx.$$

calcul : $I = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ on pose $J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctg}\, t]_0^1 = \frac{\pi}{4}$

On calcule l'integrale J par integration par partie

On pose : $\begin{cases} u = \frac{1}{1+t^2} \\ v' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = -\frac{2t}{(1+t^2)^2} \\ v = t \end{cases}$

Alors : $J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [u.v]_0^1 - \int_0^1 u' v \, dt$

$$= \left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^1 + 2\int_0^1 \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2} dt$$

$$= \frac{1}{2} + 2\left[\int_0^1 \frac{t^2+1}{(1+t^2)^2} dt - \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt\right]$$

$$= \frac{1}{2} + 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt - 2\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} dt$$

$$J = \frac{1}{2} + 2J - 2I$$

$\Rightarrow 2I = \frac{1}{2} + J$. or $J = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \pi/4$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$

6- $\int_1^2 \frac{x^3 dx}{(1+x^4)^2}$ on pose : $u = x^4 \Rightarrow du = 4x^3 dx$

quand $x = 1 \Rightarrow u = 1$ et $x = 2 \Rightarrow u = 16$.

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{x^3 dx}{(1+x^4)^2} = \int_1^{16} \frac{1}{4} \cdot \frac{du}{(1+u)^2} = \frac{1}{4}\int_1^{16} \frac{d(1+u)}{(1+u)^2}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{1+u}\right]_1^{16} = \frac{15}{136}.$$

$* \displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}} = \int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t|t|\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}$

On pose : $u = \frac{1}{t} \Rightarrow du = -\frac{1}{t^2}dt$ $\quad \begin{cases} t=-1 \Rightarrow u=-1 \\ t=-2 \Rightarrow u=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}} = \int_{-1/2}^{-1} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \left[\operatorname{Argsh}(u)\right]_{-1/2}^{-1}$$

$$= \operatorname{Arg\,sh}(-1) - \operatorname{Arg\,sh}(-1/2)$$

$$= \operatorname{Arg\,sh}\left(\tfrac{1}{2}\right) - \operatorname{Arg\,sh}(1)$$

$* \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t(1+t)}$ $\quad$ On a $\displaystyle\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^2 \frac{1}{t}dt + \int_1^2 \frac{1}{1+t}dt = \left[\operatorname{Log}|t|\right]_1^2 + \left[\operatorname{Log}|1+t|\right]_1^2$$

$$= 2\operatorname{Log}2 - \operatorname{Log}3 = \operatorname{Log}\left(\tfrac{4}{3}\right).$$

Calcul de $\displaystyle\int_1^2 \frac{\operatorname{Log}(1+t)}{t^2}dt$

On fait une integration par partie

On pose : $\begin{cases} u = \operatorname{Log}(1+t) \\ v' = \dfrac{1}{1+t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \dfrac{1}{t^2}dt \\ v = -\dfrac{1}{t} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{\operatorname{Log}(1+t)}{t^2}dt = -\left[\frac{\operatorname{Log}(1+t)}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dt}{1(1+t)}$$

$$= \operatorname{Log}\frac{8}{\sqrt{27}}$$

$* \displaystyle\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+2x-3}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2+2x-3}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{2x+}{x^2+2x-3}$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{2x+2}{x^2+2x-3}dx - \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x-3}dx$$

* $\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}} = \int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t|t|\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}} = -\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t^2\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}}$

On pose : $u = \frac{1}{t} \Rightarrow du = -\frac{1}{t^2}dt$ $\begin{cases} t=-1 \Rightarrow u=-1 \\ t=-2 \Rightarrow u=-\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{t\sqrt{t^2+1}} = \int_{-1/2}^{-1} \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \left[\operatorname{Argsh}(u)\right]_{-1/2}^{-1}$$

$$= \operatorname{Arg\,sh}(-1) - \operatorname{Arg\,sh}(-1/2)$$

$$= \operatorname{Arg\,sh}\left(\frac{1}{2}\right) - \operatorname{Arg\,sh}(1)$$

* $\int_1^2 \frac{dt}{t(1+t)}$ on a $\frac{1}{t(1+t)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{dt}{t(1+t)} = \int_1^2 \frac{1}{t}dt + \int_1^2 \frac{1}{1+t}dt = \left[\operatorname{Log}|t|\right]_1^2 + \left[\operatorname{Log}|1+t|\right]_1^2$$

$$= 2\operatorname{Log}2 - \operatorname{Log}3 = \operatorname{Log}\left(\frac{4}{3}\right).$$

Calcul de $\int_1^2 \frac{\operatorname{Log}(1+t)}{t^2}dt$

On fait une integration par partie

On pose : $\begin{cases} u = \operatorname{Log}(1+t) \\ v' = \frac{1}{1+t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = \frac{1}{t^2}dt \\ v = -\frac{1}{t} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_1^2 \frac{\operatorname{Log}(1+t)}{t^2}dt = -\left[\frac{\operatorname{Log}(1+t)}{t}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{dt}{1(1+t)}$$

$$= \operatorname{Log}\frac{8}{\sqrt{27}}$$

* $\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2+2x-3}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{2x}{x^2+2x-3}dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{2x+}{x^2+2x-3}$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^0 \frac{2x+2}{x^2+2x-3}dx - \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x-3}dx$$

On a $* \int_{-1}^{0} \frac{2x+2}{x^2+2x-3}dx = \int_{-1}^{0} \frac{(x^2+2x-3)'}{x^2+2x-3}dx = \left[Log|x^2+2x-3| \right]_{-1}^{0}$

$= Log \frac{3}{4}$

$* \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x-3} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2-4} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{0} \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2-1}$

On pose $u = \frac{x+1}{2}$ $\Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow u=0 \\ x=0 \Rightarrow u=\frac{1}{2} \end{cases}$

$du = \frac{1}{2}dx$

$\Rightarrow \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x-3} = \frac{1}{4}\int_{0}^{1/2} \frac{2du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\int_{0}^{1/2} \frac{du}{u^2-1}$

On pose $\sin(x) = u \Rightarrow \cos(x)dx = du$

$\Rightarrow \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x-3} = \frac{1}{2}\int_{0}^{\sin(1/2)} \frac{\cos(x)\,dx}{\sin^2 x - 1}$ or $\sin^2(x) - 1 = -\cos^2 x$

$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\sin(1/2)} \frac{\cancel{\cos(x)}\,dx}{-\cos^2 x} = -\frac{1}{2}\int_{0}^{\sin(1/2)} \frac{dx}{\cos^2 x}$

$= -\frac{1}{2}\left[tg(x) \right]_{0}^{\sin(1/2)}$

$* \; I_n = \int_{0}^{1} x^n e^{-x} dx$

1°) - La fonction $x \longmapsto x^n e^{-x}$ est continue sur $[0,1]$ donc integrable. On de plus $\forall x \in]0,1]$ $x^n e^{-x} > 0$ $\Rightarrow$ l'integrale sur $[a,b]$ (avec $b>a$) d'une fonction continue >0 sur $[a,b]$ non identiquement nulle est strictement positive

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \; I_n > 0$.

$* \; I_1 = \int_{0}^{1} x e^{-x} dx$: Integration par partie

$u = x$ et $v' = e^{-x} \Rightarrow u' = 1$ et $v = -e^{-x}$

On a

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \text{Arc tg } x \, dx = \int_0^1 \text{Arc tg } x \, dx - \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)} \text{Arc tg } x \, dx,$$

$$\int_0^1 \frac{\text{Arc tg } x}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 \text{Arc tg } x \, d(\text{Arc tg } x) = \frac{1}{2}\left[(\text{Arc tg } x)^2\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{32}.$$

Pour calculer $\int_0^1 \text{Arc tg } x \, dx$, intégrons par partie $u = \text{Arc tg } x$, $dv = dx$.

On obtient

$$\int_0^1 \text{Arc tg } x \, dx = \Big[x \text{ Arc tg } x\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} \, dx$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\Big[\text{Log}\left(1+x^2\right)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \text{Log}\sqrt{2},$$

d'où

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \text{Arc tg } x \, dx = -\frac{\pi^2}{32} + \frac{\pi}{4} - \text{Log}\sqrt{2}.$$

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1} \, dx.$$

On décompose la fraction rationnelle en éléments simples.

On a

$$x^6 + 1 = (x^2)^3 + 1 = (x^2+1)(x^4 - x^2 + 1)$$

et $x^4 - x^2 + 1 = (x^2+1)^2 - 3x^2 = (x^2 - \sqrt{3}\,x + 1)(x^2 + \sqrt{3}\,x + 1)$, d'où

$$\frac{x^4+1}{x^6+1}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}\,x+1}+\frac{Ex+F}{x^2+\sqrt{3}\,x+1}.$$

La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^4+1}{x^6+1}$ est paire. De l'unicité de la décomposition il résulte

$$A=0, \qquad C=-E \qquad \text{et} \qquad D=F.$$

Multiplions par x^2+1 et faisons $x=i$. On obtient $B=\frac{2}{3}$.

Les valeurs $x=0$ et $x=1$ donnent $2F=\frac{1}{3}$ et $2F+C\sqrt{3}=\frac{1}{3}$, d'où

$$F=\frac{1}{6} \quad \text{et} \quad C=0.$$

Il en résulte

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}$$
$$+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}},$$

puis

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{6}\times 2\left[\operatorname{Arc\,tg} 2\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]_0^1$$
$$+\frac{1}{6}\times 2\left[\operatorname{Arc\,tg} 2\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]_0^1$$
$$=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{3}\left[\operatorname{Arc\,tg} 2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{Arc\,tg} 2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right].$$

On a

$$\frac{1}{2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}=2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

De $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, Arc tg x + Arc tg $\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$, on déduit

$$\int_0^1 \frac{x^4+1}{x^6+1}\,dx = \frac{\pi}{3}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin^2 x\,dx.$$

Les exposants de sin x et cos x sont pairs. On doit donc linéariser.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},$$

$$\cos^4 x = \left[\frac{1+\cos 2x}{2}\right]^2 = \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 2x + \frac{\cos 4x + 1}{2}\right],$$

d'où

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{16}\,[1-\cos 2x]\,[3 + 4\cos 2x + \cos 4x]$$

$$= \frac{1}{16}\left(3 + \cos 2x + \cos 4x - 2\,(1 + \cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x)\right),$$

c'est-à-dire

$$\sin^2 x \cos^4 x = \frac{1}{16}\left[1 + \frac{\cos 2x}{2} - \cos 4x - \frac{1}{2}\cos 6x\right].$$

On en déduit

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \sin^2 x\,dx = \frac{1}{16}\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right].$$

EXERCICES

Fonctions de deux variables

EX.1: Trouver une fonction numérique f de deux variables, dont le graphe est le plan contenant la droite $z = -2y + 2$ du plan yoz et qui contient le point (x_0, y_0, z_0), dans les deux cas suivants:

a) $(x_0, y_0, z_0) = (2, 0, 0)$;

b) $(x_0, y_0, z_0) = (2, 1, 0)$.

EX.2: Soit la fonction définie par $f(x, y) = log(1 + x^2 + y^2)$.

1) Donner le domaine de définition $D(f)$ de f.

2) Donner le domaine des valeurs $W(f)$ de f.

3) Décrire les courbes de niveau de f, c-à-d les courbes d'équation $f(x, y) = c$ dans le plan xoy, où c est une constante arbitraire dans $W(f)$.

EX.3: Soit $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

a) Donner le domaine de définition $D(f)$ de f.
Dessiner $D(f)$ dans le plan xoy.

b) Donner l'ensemble des valeurs $W(f)$ de f.
Indication: on pourra utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

c) Décrire les courbes de niveau de f.

Exercice 1 :

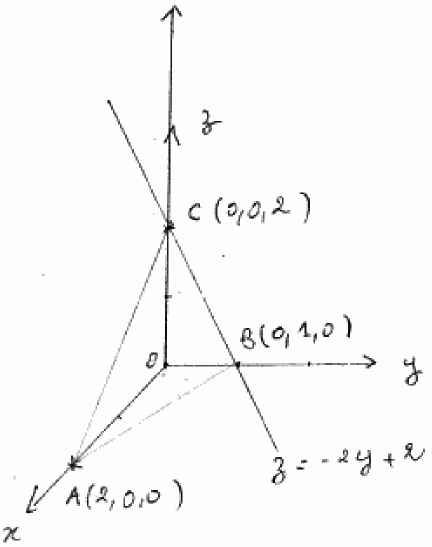
a/ Soit : $ax + by + cz + d = 0$ l'équation du plan P contenant la droite $z = -2y + 2$ du plan yoz et contient le point $A(2,0,0)$

cherchons une fonction $z = f(x,y)$ dont le graphe est le plan P.

on a $A(2,0,0) \in P$

$B(0,1,0) \in P$

$C(0,0,2) \in P$



$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + d = 0 \\ b + d = 0 \\ 2c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{d}{2} \\ b = -d \\ c = -\frac{d}{2} \end{cases}$$

comme on cherche une fonction, il sufi de prendre $d = -1$ ou $d = -2$ dans le qua on obient :

* pour $d = -2 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}$

En remplaçant dans l'equation du plan P on obtient :

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\Rightarrow x + 2y + z - 2 = 0 \quad \Rightarrow z = -x - 2y + 2 \Rightarrow f(x,y) = -x - 2y + 2$$

b/ pour le point $A(2,1,0)$

on a $A(2,1,0) \in P$, $B(0,1,0) \in P$ et $C(0,0,2) \in P$

l'equation du plan P est $ax + by + cz + d = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a + b + d = 0 \\ b + d = 0 \\ 2c + d = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -d \\ c = -\frac{d}{2} \end{cases}$$

comme on cherche une fonction, il sufit de prendre $d = 2$ dans ce cas on obtient :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases}$$

on remplaçant dans l'equation du plan P on obient.

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2y - z + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -2y + 2$$

donc $f(x,y) = -2y + 2$

Exercice 2:

Soit $f(x,y) = \log(1 + x^2 + y^2)$

1/ le domaine de définition $D(f)$ de f

on a $D(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ f(x,y) \in \mathbb{R} \}$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ \log(1 + x^2 + y^2) \in \mathbb{R} \}$$

$$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ 1 + x^2 + y^2 > 0 \}$$

$$= \mathbb{R}^2 \qquad (\text{car } \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ 1 + x^2 + y^2 > 0)$$

D'où $D(f) = \mathbb{R}^2$

2) le domaine des valeurs $W(f)$ de f.

on a $W(f) = \{ f(x,y) / (x,y) \in D_f \}$

$$= \{ \log(1 + x^2 + y^2) / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$$

Exercice 2 :

Soit la fonction définie par $f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$

1/ Domaine de définition $D(f)$ de f :

on a $D(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \log(1+x^2+y^2) \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1+x^2+y^2 > 0 \}$

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $1+x^2+y^2$ toujour strictement positif.

$\Rightarrow D(f) = \mathbb{R}^2$

2) Domaine des valeurs $W(f)$ de f.

on a $W(f) = \{ f(x,y) / (x,y) \in D(f) \}$

$= \{ \log(1+x^2+y^2) / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

on utilison les coordonnées polaires

posons $\begin{cases} x = r\cos\theta & ; r \geq 0 \\ y = r\sin\theta & ; \theta \in [0, 2\pi] \end{cases}$.

Alors $1+x^2+y^2 = 1 + r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1 + r^2 \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{1}$

$1+x^2+y^2 = 1+r^2$

$f(x,y) = \log(1+x^2+y^2) = \log(1+r^2) = g(r)$

on a alors $W(f) = \{ \log(1+x^2+y^2) / (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \{ \log(1+r^2) / r \in [0, +\infty[\}$

$= \{ g(r) ; r \in [0, +\infty[\}$

$= g([0, +\infty[)$

$= [g(0), \lim_{r \to +\infty} g(r)[$ $\quad$ g est bijective. à démontrer

$= [0, +\infty[= \mathbb{R}^+$

avec $g(0) = \log(1+0^2) = 0$; $\lim_{r \to +\infty} \log(1+r^2) = +\infty$

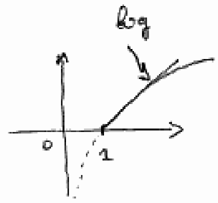
* il faut montrer que $g(r)$ est bijective sur $[0,+\infty[$

on a $g(r) = \log(1+r^2)$

g est une fonction strictement croissante sur $[0,+\infty[$

en effet :

Soient $r_1, r_2 \in [0,+\infty[$ tels que $r_1 < r_2$



on a $0 \leq r_1 < r_2$

$\Rightarrow \quad 0 \leq r_1^2 < r_2^2$

$\Rightarrow \quad 1 \leq 1+r_1^2 < 1+r_2^2$

$\Rightarrow \quad \log(1) \leq \log(1+r_1^2) < \log(1+r_2^2)$) car $\log$ strictement $\nearrow$ sur $[1,+\infty[$

$\Rightarrow \quad g(r_1) < g(r_2)$

$\begin{cases} r_1 < r_2 \\ g(r_1) < g(r_2) \end{cases} \Rightarrow$ g est une fonction strictement croissante sur $[0,+\infty[$

g continue est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ donc g est bijective de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[) = [0,+\infty[$.

3/ les courbes de niveau de f sont données par l'équation

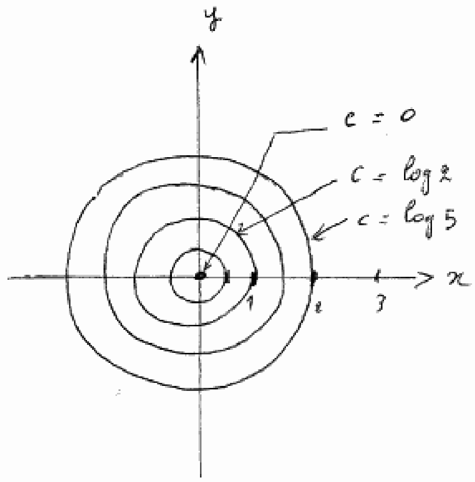
$f(x,y) = c$ où $c \in W(f) = \mathbb{R}^+$

$f(x,y) = c \Leftrightarrow \log(1+x^2+y^2) = c \Leftrightarrow 1+x^2+y^2 = e^c$

$\Leftrightarrow x^2+y^2 = e^c-1 \Leftrightarrow \underbrace{x^2+y^2 = (\sqrt{e^c-1})^2}_{\text{équation du cercle}}$ $\left(\begin{array}{l} \text{car } c \geq 0 \\ \Rightarrow e^c-1 \geq 0 \end{array}\right)$

$\Leftrightarrow (x,y) \in \mathcal{C}(0, \sqrt{e^c-1})$

les courbes de niveau de f sont donc les cercles de centre $O(0,0)$ et de rayon $R_c = \sqrt{e^c-1}$



$c \in W(f) = [0,+\infty[$

pour $c = 0$ on a $R_0 = \sqrt{e^0-1} = 0$

pour $c = \log(2)$ on a $R_{\log(2)} = \sqrt{2-1} = 1$

pour $c = \log(5)$ on a $R_{\log(5)} = \sqrt{5-1} = 2$

⋮

Exercice 3 :

soit $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$

a/ Domaine de féfinition $D(f)$ de f.

on a $D(f) = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / f(x,y) \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4 - x^2 - 4y^2 \geqslant 0 \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 4y^2 \leqslant 4 \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1 \}$

$= \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 / \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{1}\right)^2 \leqslant 1 \}$

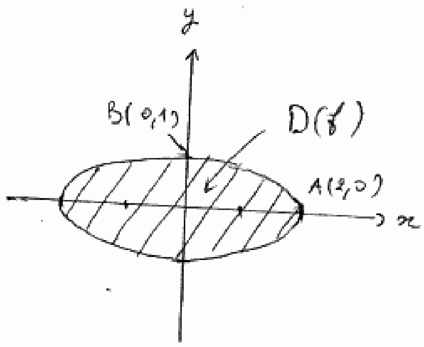
$D(f)$ est l'ellipse de Centre O et de demi-axes $OA = 2$ et $OB = 1$

Rappel :

équation de Cercle $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$

équation de disque $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \leqslant R^2$

équation d'ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \leqslant R$.



b/ Ensemble des valeurs $W(f)$ de f.

on a $W(f) = \{ f(x,y) / (x,y) \in D_f \}$

$= \{ \sqrt{4 - x^2 - 4y^2} / \frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1 \}$

posons $\begin{cases} \frac{x}{2} = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$; $\begin{matrix} r \geqslant 0 \\ \theta \in [0, 2\pi] \end{matrix}$

Alors $0 \leqslant \frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1 \iff 0 \leqslant \frac{1}{4} \times 4 r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta \leqslant 1 \iff 0 \leqslant r^2 \leqslant 1$

$\sqrt{4 - x^2 - 4y^2} = \sqrt{4 - 4r^2\cos^2\theta - 4r^2\sin^2\theta} = \sqrt{4 - 4r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{4 - 4r^2} = g(r)$

$\Rightarrow W(f) = \{ \sqrt{4 - x^2 - 4y^2} / \frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1 \}$

$= \{ \sqrt{4 - 4r^2} / 0 \leqslant r \leqslant 1$

$\Rightarrow W(f) = \{ g(r) \ / \ r \in [0,1] \}$

$= g([0,1])$

on a $g(r) = \sqrt{4-4r^2} \quad \forall r \in [0,1]$

g étant une fonction continue et strictement décroissante sur $[0,1]$, donc g est bijective de $[0,1]$ sur $g([0,1]) = [(g(1), g(0)]$

$g(0) = \sqrt{4-0} = 2$

$g(1) = \sqrt{4-4} = 0$

$\Rightarrow g([0,1]) = [g(1), g(0)] = [0,2]$

finalement $\boxed{W(f) = [0,2]}$

c/ les courbe de niveau de f

-les courbes de niveau de f sont données par l'équation $f(x,y) = c$ avec $c \in W(f) = [0,2]$

$f(x,y) = c \Leftrightarrow \sqrt{4-x^2-4y^2} = c \Leftrightarrow 4-x^2-4y^2 = c^2$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 = -c^2 + 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = \frac{4-c^2}{4}$

* si $c = 2$ dans ce cas on obtient $f(x,y) = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0, \ y = 0$

* si $c \in [0,2[$ dans ce cas on aura $f(x,y) = c$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = \frac{4-c}{4} \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{4(4-c^2)}{4}} + \frac{y^2}{\frac{4-c^2}{4}} = 1$

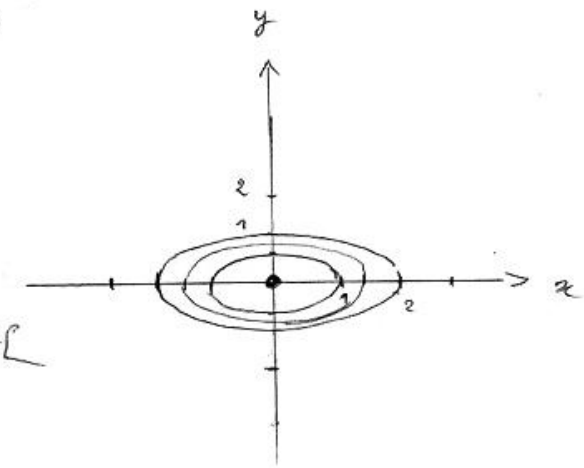
$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{\sqrt{4-c^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{\sqrt{4-c^2}}{2}}\right)^2 = 1$ les courbe de niveau de f sont les Ellipses de centre $O(0,0)$ et de demi-axe $A_c = \sqrt{4-c^2}$ et $B_c = \frac{\sqrt{4-c^2}}{2}$, avec $c \in [0,2[$

Conclusion: les courbe de niveau de f sont les point $(0,0)$ et les ellipse de centre $O(0,0)$ et de demi-axes $\sqrt{4-c^2}$ et $\frac{\sqrt{4-c^2}}{2}$

si $c = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_0 = 2 \\ B_0 = 1 \end{cases}$

$c \in [0,2[$

si $c = 1 \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \sqrt{3} \\ B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$



Chimie génerale

Extrait de l'examen Juin 1979 FSSM

a) - Equilibrer la réaction suivante :

$$C_6H_6 + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O$$

b) - A 25°C, l'enthalpie de combustion d'une mole de benzène liquide (C_6H_6) pour donner de l'eau et du gaz carbonique dans leur état standard est : $\Delta H°_1 = -780{,}98$ kcal./mole . Dans les mêmes conditions, l'enthalpie de combustion d'une mole de benzène gazeux pour donner de l'eau et du gaz carbonique dans leur état standard est $\Delta H°_2 = -789{,}08$ kcal./mole.

- Quelle est l'enthalpie de vaporisation du benzène à 25°C ?

(Juin 1979).

Extrait de l'examen 1980

Un volume de 10 litres de gaz (supposé parfait) est comprimé de façon réversible et isotherme jusqu'à ce qu'il soit réduit au dixième de sa valeur initiale.
La température du système est de 0 °C et la pression initiale d'une atmosphère.

a) - Calculer le travail mis en jeu lors de la compression.
Indiquer si le gaz fournit ou reçoit du travail.
Donnée : $R = 2$ cal . mol^{-1} . K^{-1}.

b) - Quelle est la variation de l'énergie interne du gaz ?

c) - Quelle est la quantité de chaleur échangée par le gaz ?
Indiquer si le gaz fournit ou reçoit de la chaleur. Justifier le résultat en 3 lignes au maximum.

d) - Quelle est la variation d'entropie du gaz ? Justifier le signe du résultat en 3 lignes au maximum.

(Septembre 1980).

Extrait de l'examen Juin 1981 FSSM

On introduit un excès de NH_4Cl (s) (dont on négligera le volume) dans un récipient préalablement vidé d'air. Le système est porté à 340°C, température à laquelle on étudie l'équation (1) :

$$NH_4Cl\,(s) \rightleftarrows NH_3\,(g) + HCl\,(g) \qquad (1)$$

La pression P à l'intérieur du récipient à l'équilibre, à 340°C, est P = 1 atm.

1°) - On se propose de changer la température du système, tout en conservant l'état d'équilibre du système. Montrer qu'à chaque température correspond une seule pression d'équilibre, parfaitement déterminée.

2°) - Quelle sera la valeur de la constante d'équilibre, K_p, à 340°C, pour l'équilibre (1) ?

3°) - Les valeurs des enthalpies libres molaires (à 340°C et sous une atmosphère) de NH_3 (g) et HCl (g) sont respectivement, + 1,5 kcal/mole et – 22,0 kcal/mole. Calculer la valeur de l'enthalpie libre molaire de NH_4Cl (s) à 340°C et 1 atmosphère.

(Juin 1981).

Extrait de l'examen Juin 1982 FSSM

I - On considère l'équilibre (A) :

$$CaCO_3\,(s) \underset{2}{\overset{1}{\rightleftharpoons}} CaO\,(s) + CO_2\,(g) \qquad (A)$$

Le tableau suivant donne les enthalpies libres standard, ΔG°_{298} (exprimées en kcal . mole^{-1}), les enthalpies standard, ΔH°_{298} (en kcal . mole^{-1}) ainsi que les entropies standard, ΔS°_{298} (exprimées en cal . mole^{-1} deg^{-1}) pour les trois corps ci-dessus :

Corps	ΔG°_{298} (kcal . mole^{-1})	ΔH°_{298} (kcal . mole^{-1})	ΔS°_{298} (cal . mole^{-1}. K^{-1})
$CaCO_3$ (s)	– 269,80	– 288,50	22,20
CaO (s)	– 144,40	– 151,80	9,50
CO_2 (g)	– 94,25	– 94,05	51,06

On admettra, tout au long de ce problème, que l'enthalpie de la réaction dans le sens 1, ainsi que l'entropie de la réaction dans le sens 1 ne dépendent pas de la température.

1°) - Calculer la valeur de l'enthalpie libre de la réaction dans le sens 1. La réaction dans le sens 1, aura-t-elle lieu de façon spontanée à 298 K ?

2°) - Calculer la valeur de l'enthalpie de la réaction dans le sens 1, à 298 K. En faisant un raisonnement clair et ne dépassant pas trois lignes, indiquer si une augmentation de la température déplace l'équilibre dans le sens 1 ou dans le sens 2.
(Une réponse mettant en jeu des équations sera considérée fausse).

3°) - Calculer la valeur de la constante d'équilibre K_p pour l'équilibre (A) à 839°C. On donne : $R = 0{,}082$ atm. l . deg^{-1} . $mole^{-1}$.

4°) - On introduit dans un ballon de 10 l, préalablement vidé d'air, 280,0 g d'oxyde de calcium solide ainsi que 22 g de CO_2 gazeux. Cette opération a lieu à 0 °C. On porte le système à 839°C et on laisse l'équilibre s'établir.

a) Quelle sera la pression du système à l'équilibre ?

b) Quelles seront les masses respectives de CaO (s) et de $CaCO_3$ (s) à l'équilibre ?
Masses atomiques : Ca : 40 ; C : 12 ; O : 16
On négligera le volume des corps solides par rapport à celui des gaz.
On considère que le volume du récipient n'est pas affecté par le changement de température.

II - 1°) - L'oxydation du méthane par la vapeur d'eau s'accompagne d'une chaleur de réaction que l'on écrit, pour simplifier : ΔH_1

$$CH_4\,(g) + H_2O\,(g) \longrightarrow CO\,(g) + 3\,H_2\,(g)$$

- Déterminer ΔH_1 à partir des données suivantes : chaleur d'oxydation partielle du méthane en monoxyde de carbone :

$$CH_4 + 1/2\,O_2 \longrightarrow CO + 2\,H_2,$$

$\Delta H_2 = -8{,}50$ kcal.

L'enthalpie de formation de l'eau vapeur :

$\Delta H_3 = -53{,}00$ kcal . $mole^{-1}$.

2°) - Dans un ballon, à 25°C, on introduit 2 g d'un gaz A ; 12 g d'azote gazeux et 18 g d'un gaz B. La masse volumique du mélange est égale à 3,2 g . l^{-1} et la pression est de 6,238 atm. On indique également la pression partielle de A : 2,439 atm.

On demande le nombre de moles de gaz A et la pression partielle du gaz B (masse atomique de l'azote = 14).

3°) - Une mole de vapeur se transforme en eau à 100 °C, sous 1 atm. La chaleur latente de vaporisation de l'eau, à 100°C et 1 atm, est de 540 cal/g. On considère que la vapeur se comporte comme un gaz parfait, et que le volume molaire du liquide est négligeable devant celui du gaz. On demande de calculer :

$$W \ , \ Q \ , \ \Delta H \ \text{ et } \ \Delta U$$

au cours de cette transformation. (masse molaire de l'eau = 18).

$R = 0{,}082$ atm. l . K^{-1}. mole^{-1} ou 2 cal . K^{-1} . mole^{-1}.

(Juin 1982).

Extrait de l'examen Mai 1984 FSSM

On considère l'équilibre suivant, où les gaz sont supposés parfaits :

$$Cl_2\,(g) \ + \ 3\,F_2\,(g) \rightleftharpoons 2\,ClF_3\,(g)$$

On demande :

1°) - l'enthalpie standard de la réaction, à 25 °C,

2°) - la variation de l'énergie interne du système, au cours de la réaction, dans les conditions standard, à 25 °C,

3°) - l'enthalpie standard de la réaction à 300 °C,

4°) - la valeur de l'enthalpie libre standard de la réaction, à 25 °C,

5°) - la valeur de la constante d'équilibre, à 25 °C,

6°) - la géométrie de ClF_3 (utiliser les règles de Gillespie),

On donne :

$\Delta H^\circ_{f,298,ClF_3\,(g)} = -38{,}8$ kcal . mol^{-1} ; ΔS°_{298} de la réaction $= -65$ cal . K^{-1}

$C^\circ_{P,Cl_2} = 8{,}77$ cal . K^{-1} . mol^{-1} ; $C^\circ_{P,F_2} = 8{,}94$ cal . K^{-1} . mol^{-1} ;

$C^\circ_{P,ClF_3} = 22{,}1$ cal . K^{-1} . mol^{-1} ;

constante des gaz parfaits, $R = 2$ cal . K^{-1} . mol^{-1}.

(Mai 1984).

Extrait de l'examen Juin 1984 FSSM

1°) - Déterminer l'enthalpie de formation $\Delta H°_f$ du benzène liquide à partir du carbone graphite et de l'hydrogène gaz :

$$6\ C_{graphite} + 3\ H_{2\ gaz} \longrightarrow C_6H_{6\ liquide} \qquad \Delta H°_f\ ?$$

sachant que pour la réaction de combustion :

$$C_6H_{6\ liquide} + 15/2\ O_{2\ gaz} \longrightarrow 6\ CO_{2\ gaz} + 3\ H_2O_{\ liquide}$$

on a $\Delta H° = -780{,}98$ kcal . mol^{-1} et que $\Delta H°_{f,\ CO_2\ gaz} = -94{,}05$ kcal . mole^{-1} et $\Delta H°_{f,\ H_2O\ liquide} = -68{,}32$ kcal . mol^{-1}.

2°) - Ecrire deux formules de Lewis possibles pour le benzène.

En déduire la géométrie de cette molécule ainsi que l'état d'hybridation du carbone.

3°) - Soit la réaction d'hydrogénation :

$$C_6H_{6\ gaz} + 3\ H_{2\ gaz} \longrightarrow C_6H_{12\ gaz} \qquad \Delta H°\ ?$$

a) Calculer la valeur de $\Delta H°$ sachant que l'énergie de liaison est de 103 kcal. pour H — H, 145 kcal. pour C = C, 80 kcal. pour C — C et 98 kcal. pour C — H.

On rappelle que l'énergie de liaison E_{X-Y} est la variation d'enthalpie qui correspond à la réaction :

$$X - Y\ (g) \longrightarrow X\ (g) + Y\ (g)$$

b) En réalité, la valeur mesurée expérimentalement pour $\Delta H°$ est de – 49 kcal/mol. Comment expliquer cette différence si l'on ne tient pas compte de l'imprécision de la méthode et des erreurs expérimentales.

Remarque : toutes les enthalpies sont données pour T = 298 K.

(Juin 1984).

Semestre 2 Correction des Contrôles en chimie. Filière : SMP_SMC

Exercice 1 (Extrait du Contrôle Juin 1979 – Faculté des Sciences Semlalia

a) – La réaction de combustion du benzène s'écrit :

$$C_6H_6 + \frac{15}{2}O_2 \longrightarrow 6CO_2 + 3H_2O$$

b) – L'enthalpie de vaporisation du C_6H_6 $\Delta_V H^\circ_{298}$ peut être conclue à partir du cycle suivant.

$$\begin{array}{ccc} C_6H_6\,(l) + \frac{15}{2}O_2 & \xrightarrow{\Delta H^\circ_{1,298}} & 6CO_2 + 3H_2O \\ \Delta H^\circ \searrow & & \nearrow \Delta H^\circ_2 \\ & C_6H_6\,(g) + \frac{15}{2}O_2\,(g) & \end{array}$$

On déduit $\Delta H^\circ_V = \Delta H^\circ_1 - \Delta H^\circ_2$

AN : $\Delta H^\circ_V = -780{,}98 - (-789{,}08) = 8{,}10$ Kcal/mole.

Exercice 2 (Extrait de l'examen de Septembre 1980 – FSSM)

On a le gaz supposé parfait ⇒ deux état :

- état initial (avant compression
  $P_1 = 1$ atm ; $V_1 = 10\,l$; $T_1 = T = 273$ K
- état final (après compression)
  $P_2 = ?$; $V_2 = \frac{V_1}{10} = 1\,l$; $T_2 = T_1 = T = 273$ K.

a) – lors de la compression on a $\delta W = -P_{ext}\,dV$

on a transformation réversible ⇒ $P_{ext} = P$ (P pression interne du gaz parfait) ⇒ $\delta W = -P\,dV$

$$\Rightarrow W = -\int_{V_1}^{V_2} P\,dV \quad \left(GP \Rightarrow PV = nRT \Rightarrow P = \frac{nRT}{V} \right)$$

$$= -\int_{V_1}^{V_2} nRT\frac{dV}{V} = -nRT\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Loi des gaz parfait appliqué au gaz à l'état initial :

$P_1V_1 = nRT$

d'où $W = -P_1V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$ AN : $P = 1atm = 1,013.10^5 Pa$, $V = 10l$

$\Rightarrow$ $W = 2332,52$ J $= 2,332$.KJ. $> 0 \Rightarrow$ le système reçoit du travail.

b°)- On a gaz parfait $\Rightarrow$ l'énergie interne du système ne dépend que de la température

$\Rightarrow \Delta U = n C_v \Delta T$, Cv : capacité calorifique molaire du gaz

On a transformation isotherme $\Rightarrow \Delta U = 0$ (car $dT = 0$)

c°)- 1er principe de la thermodynamique $\Rightarrow \Delta U = Q + W$.

$\Rightarrow$ $Q = -W = -2332,52$ J

Au cours de la compression, le gaz reçoit du travail et en contre il fournit la même quantité de chaleur ($Q = -W$)

d)- On a transformation réversible , $dS = \frac{\delta Q_{rév}}{T}$

puisque $T = C^{ste}$

$\Rightarrow \Delta S = \frac{Q}{T} \Rightarrow$ AN, $T = 273$ K , $Q = -2332,52$ J

$\Rightarrow \| \Delta S = -8,54 \ JK^{-1}$.

$\Delta S < 0$ l'entropie du système diminue au cours de la transformation $\Rightarrow$ le désordre ↘

gaz à l'état initial est moin ordonné que l'état final.

Exercice 3 Extrait d'examen Juin 1981 FSSM.

La dissociation de $NH_4Cl(s)$:

$NH_4Cl(s) \rightleftharpoons NH_3(g) + HCl(g)$ ①

1°)- pour montrer qu'à chaque température, il existe une seule valeur de pression pour laquelle l'equilibre est conservé, il faut que le système soit monovalent. $\Rightarrow$ variance du système $= 1$

$V = F - R$

F: le nombre de facteurs d'equilibre $F = \begin{cases} T \\ P_{total} \\ P_{NH_3}, P_{HCl} \end{cases}$

R: est le nombre de relation entre ces facteurs: $K_p = P_{NH_3} \cdot P_{HCl}$, $P = P_{NH_3} + P_{HCl}$ et $P_{NH_3} = P_{HCl}$.

$P_{NH_3} = P_{HCl}$ car l'equilibre est obtenu à partir de $NH_4Cl(s)$ pur.

on a $F = 4$ et $R = 3 \Rightarrow V = 1$.

$\Rightarrow$ le système est donc bien monovariant.

2°)- La constante $K_p = \dfrac{P_{H_3} \cdot P_{HCl}}{P_{NH_4Cl}}$ avec $P_{NH_3} + P_{HCl} = P$ et $P_{NH_3} = P_{HCl} = \dfrac{P}{2}$

donc $K_p = \dfrac{P^2}{4}$ AN: $K_p = 0{,}25 \text{ atm}^2$.

3°). La variation d'enthalpie libre $\Delta G°$ de la reaction ① à 613 K s'exprime en fonction des enthalpies libres molaires de formation $\Delta G_{NH_3(g)}$ / $\Delta G°_{HCl(g)}$ et $\Delta G°_{NH_4Cl(s)}$ par:

$$\Delta G° = \Delta G°_{NH_3(g)} + \Delta G°_{HCl(g)} - \Delta G°_{NH_4Cl(s)}$$

On a la condition d'equilibre: $\Delta G° = -RT \ln K_p$.

on déduit que: $\Delta G°_{NH_4Cl(s)} = \Delta G°_{NH_3(g)} - \Delta G°_{HCl(g)} - R\ln K_p$

AN: $T = 613K$; $R = 2 \text{ cal} \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$

on trouve: $\| \Delta G°_{NH_4Cl(s)} = -22{,}2 \text{ Kcal/mol}$.

Exercice 4 : Examen . Juin 1982 - FSSM.

I - 1°) La variation d'enthalpie libre standard ΔG°_{298} de la réaction (A) dans le sens 1 peut être calculée de deux manière suivante. $\Delta G^\circ_{298} = \sum \Delta G^\circ_{f,298}(\text{produits}) - \sum \Delta G^\circ_{f,298}(\text{reactifs})$

$\Delta G^\circ_{f,298}$: l'enthalpie libre de formation standard.

Donc $\Delta G^\circ_{298} = \Delta G^\circ_{f,298}(CO_2(g)) + \Delta G^\circ_{f,298}(CaO(s)) - \Delta G^\circ_{f,298}(CaCO_3(s))$

AN : $\Delta G^\circ_{298} = 31,15 \text{ Kcal} > 0$

$\Delta G^\circ_{298} > 0 \Rightarrow$ la reaction (A) ne peut pas avoir lieu spontanément à 298 K dans le sens 1.

2°) - La variation d'enthalpie standard ΔH°_{298} de la reaction (A) dans le sens 1 peut être calculée de la même façon que ΔG°_{298}

$$\Delta H^\circ_{298} = \Delta H^\circ_{f,298}(CO_2(g)) + \Delta H^\circ_{f,298}(CaO(s)) - \Delta H^\circ_{f,298}(CaCO_3(s))$$

AN : $\Delta H^\circ_{298} = 42,65 \text{ Kcal}$

La reaction (A) est exothermique dans le sens 1, car ΔH°_{298} est positive, une augmentation de temperature deplace, donc l'equilibre dans le sens endothermique (sens 2).

3°) - La constante $Kp(T)$ de l'equilibre (A) dans le sens 1 à la temperature $T = 1112 K$ est donnée par la relation

$$\Delta G^\circ_T = -RT \ln Kp(T)$$

D'autre part : $\Delta G^\circ_T = \Delta H^\circ_T - T\Delta S^\circ_T$.

ΔH°_T et ΔS°_T ne dependent pas de la temperature, donc

$$\Delta G^\circ_T = \Delta H^\circ_{298} - T\Delta S^\circ_{298}.$$

d'ou l'expression de $Kp(T)$ $\quad Kp(T) = \exp\left(-\frac{\Delta H^\circ_{298}}{RT} + \frac{\Delta S^\circ_{298}}{R}\right)$

AN : $\Delta S^{\circ}_{298} = 38,36.10^{-3}\ Kcal\ mol^{-1}\ K^{-1}$

$Kp\ (1112K) = 1\ atm$.

4°)- Le système est caractérisé par les deux États :

Etat initial

$V = 10\ l$

$T_1 = 273\ K$

$nCO_2 = \dfrac{mCO_2}{MCO_2} = \dfrac{22}{44} = 0,5\ mol$

$nCaO = \dfrac{m\ CaO}{MCaO} = \dfrac{280}{56} = 5\ mol$

$nCaCO_3 = \dfrac{mCaCO_3}{MCaCO_3} = 0\ mol$

Etat final.

$V = 10\ l$

$T_2 = 1112\ K$.

$n' = \dfrac{m'CO_2}{MCO_2}$

$n' = \dfrac{m'CaO}{M\ CaO}$

$n'CaCO_3 = \dfrac{m'CaCO_3}{MCaCO_3}$.

l'eat final du système se caractérise par la présence de CaO / CO_2 et $CaCO_3$ en equilibre suivant la reaction :

$$CaO(s) + CO_2(g) \rightleftharpoons CaCO_3(s)$$

$\Rightarrow K'p = \dfrac{1}{Kp(T_2)} = \dfrac{1}{P_{CO_2}}$, P_{CO_2} est la pression de CO_2

a)- La pression du système à l'equilibre est egale à P_{CO_2}

$$P = P_{CO_2} = Kp(T_2)$$

AN : $Kp(T_2) = 1\ atm$ donc $P = 1\ atm$.

b°)- les masses $m'CaO$ de $CaO(s)$ et $m'CaCO_3$ de $CaCO_3$ seront calculées une fois leur nombre de moles respectif $n'CaO$ et $n'CaCO_3$ determiné.

$$CaO(s) + CO_2(g) \rightleftharpoons CaCO_3(s).$$

$n_{CaO} - x \qquad n_{CO_2} - x \qquad\qquad x$

l'application de la loi des gaz parfait du (CO_2)

$$\Rightarrow \quad x = n_{CO_2} - \frac{P_{CO_2} \cdot V}{RT_2}$$

AN : $x = 0{,}39$ mol.

on en deduit que : $m'_{CaO} = n'_{CaO} \cdot M_{CaO} = (n_{CaO} - x) \cdot M_{CaO}$

et $m'_{CaCO_3} = n'_{CaCO_3} \cdot M_{CaCO_3} = (n_{Ca}\ x \cdot M_{CaCO_3}$

AN : $M_{CaO} = 56$ g/mol et $M_{CaCO_3} = 100$ g/mol.

$m'_{CaO} = 258{,}2g$ $\cdot$ $m'_{CaCO_3} = 39g$.

II - 1°) la chaleur de la reaction ΔH_1 peut être calculée à partir du sycle.

$$\begin{array}{ccc} CH_4(g) + H_2O(g) & \xrightarrow{\Delta H_1} & CO(g) + 3H_2(g) \\ \downarrow -\Delta H_3 & & \nearrow \Delta H_2 \\ CH_4(g) + \frac{1}{2}O_2(g) + H_2O(g) & & \end{array}$$

$\Delta H_1 = \Delta H_2 - \Delta H_3$ AN : $\Delta H_1 = 48{,}50$ Kcal.

2°) - Dans le tableau ci-dessous on regroupe les données relatives au système formé par le mélange gazeux, contenu dans le ballon de volume V et porté à la température T = 298K

Nature du gaz	A	B	N_2	mélange $(A+B+N_2)$
masse (g)	$m_A = 2$	$m_B = 18$	$m_{N_2} = 12$	$m = 32$
Pression (atm)	$P_A = 2{,}435$	$P_B = ?$	$P_{N_2} = ?$	$P = 6{,}238$
Nombre de mole	$n_A = ?$	$n_B = ?$	$n_{N_2} = 0{,}429$	$n = ?$

l'équation d'état des gaz parfaits appliquée au gaz A dans le mélange donne : $n_A = \frac{P_A V}{RT}$ (I)

sachant que la masse volumique $\rho = \frac{m}{V}$.

6

On en déduit : $n_A = \frac{P_A \cdot m}{RT \cdot \rho}$

AN : $R = 0{,}082$ atm l. mol^{-1}.K^{-1} , $\rho = 372$ g/l.

on trouve $n_A = 1$ mole.

La pression partielle du gaz B est la pression qu'il exercerait s'il occupait tout le volume à lui seul, donc :

$$P_B = n_B \cdot \frac{RT}{V} \quad (II)$$

D'après la relation (I) on a : $\frac{RT}{V} = \frac{P_A}{n_A}$

Donc $P_B = n_B \cdot \frac{P_A}{n_A}$

En appliquant la loi des gaz parfait au mélange gazeux on obtient : $n = \frac{PV}{RT} = \frac{P}{P_A} \cdot n_A$.

D'autre part : $n_B = n - n_A - n_{N_2}$.

$$\Rightarrow P_B = P - P_A\left(1 + \frac{n_{N_2}}{n_A}\right)$$

Remarque : Le même résultat peut être obtenu en partant de la relation $P = P_A + P_B + P_{N_2}$ avec $P_B = n_B \cdot \frac{P_A}{n_A}$ et $P_{N_2} = n_{N_2} \cdot \frac{P_A}{n_A}$

$$P_B = 2{,}753 \text{ atm.}$$

3°) - $H_2O(g) \longrightarrow H_2O(l)$. (1)

• le travail mis en jeu au cours de cette transformation effectuée sous la pression P. et à la température T s'exprime par :

$$W = -P_{ext} \cdot (V_l - V_g)$$

le volume molaire V_l est négligeable devant celui du gaz V_g

et $P_{ext} = P \Rightarrow W \simeq P \cdot V_g$

donc $W = RT$ AN : $T = 373$ K, $R = 2$ cal . K^{-1} mol^{-1}

$$\Rightarrow W = 746 \text{ cal} = 3118{,}28 \text{ J.}$$

la quantité de chaleur accompagné à la reaction ① est $Q = -LV$

AN : $Q = -18 \times 540 = -9720\ cal$

On a $P = Cste \Rightarrow \Delta H = Q_P = -9720\ cal$.

1^er^ principe on a $\Delta U = Q + W$

AN : $\Delta U = -8574\ cal$.

*N : on peut obtenir la même valeur en utilisant la relation : $\Delta H = \Delta U + \Delta(P.V)$.

Exercice 5 : Extrait examen Mai 1984 FSSM _ UCAM.

1°)- La variation de l'enthalpie standard $\Delta_r H^o_{298}$ de la reaction

$$Cl_2(g) + 3F_2(g) \rightleftharpoons 2\,ClF_3(g) \quad ①$$

est egale à $2\Delta_f H^o_{298}(ClF_3(g))$, car les enthalpie de formation des molécules Cl_2 et F_2 sont nulle.

$$\Delta_r H^o_{298} = 2\Delta H^o_{f\,298}(ClF_3(g)) - \Delta H^o_{f\,298}(Cl_2(g)) - 3\Delta H^o_{f\,298}(F_2(g))$$

AN : $\| \Delta H^o_{298} = -77{,}6\ kcal$

2°) La variation de l'energie est fixe, et les gaz sont supposés parfait ; $\Delta(PV) = \Delta n RT$

Δn : la difference entre les nombres final et initial des moles gazeuses :

d'ou $\Delta U = \Delta H - \Delta n RT$

AN : $\Delta n = -2$ $R = 2.10^{-10}\ kcal.mol^{-1}K^{-1}$

et dans les conditions standard ($P = 1atm, T = 298\ K$) $\Delta H = \Delta H^o_{298}$

$\Rightarrow \| \Delta U = -76{,}4\ kcal$

3°) – Relation de Kirchhoff :

$$\Delta H^\circ_{573} = \Delta H^\circ_{298} = \Delta H^\circ_{298} + \int_{T_1=298}^{T_2=773} \Delta C_p^\circ \, dT$$

avec $\Delta C_p^\circ = 2C_p(ClF_3) - 3C_p(F_2) - C_p^\circ, Cl_2$ (constante entre T_1 et T_2

donc $\Delta H^\circ_{573} = \Delta H^\circ_{298} + \Delta C_p^\circ (T_2 - T_1)$

AN : $\Delta C_p^\circ = 8,61.10^{-3}\ kcal.K^{-1}.mol^{-1}$

$\Rightarrow \Delta H^\circ_{573} = -75,2\ Kcal.$

4°) – la variation d'enthalpie libre ΔG :

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S.$$

à $P = 1\ atm$, $T = 298$

$\Delta G = \Delta G^\circ_{298}$; $\Delta H = \Delta H^\circ_{298} = -77,6\ Kcal$ et $\Delta S = \Delta S^\circ_{298} = -65,10^{-3}\ kcal.K^{-1}$

on trouve $\Delta G^\circ_{298} = -58,2\ Kcal.$

5°) – la variation d'enthalpie libre ΔG_T à la température T de la reaction ① est :

$$\Delta G_T = \Delta G^\circ_T + RT\ Ln \frac{P^2_{ClF_3}}{P^3_{F_2} . P_{Cl_2}}$$

P_{ClF_3}, P_{F_3}, P_{Cl_2} pression partielle de ClF_3, PF_3 et Cl_2.

à l'équilibre $\Delta G = 0$ donc $\Delta G^\circ_T = -RT\ Ln\ Kp$ avec

$$Kp = \frac{P^2_{ClF_3}}{P^3_{F_2} . P_{Cl_2}}$$. constante d'équilibre de la reaction ①

On en déduit : $Kp = \exp\left(-\frac{\Delta G^\circ_T}{RT}\right)$

AN : $T = 298$, $\Delta G^\circ_T = \Delta G^\circ_{298} = -58,2\ kcal \Rightarrow Kp = 2,7.10^{+42}\ atm^{-2}$

Kp est très élevée, ⇒ la reaction est totalement dans le sens de formation de ClF_3 (g)

Exercice 6 : Extrait d'examen. Juin 1984 – FSSM.

1°) – l'enthalpie de formation $\Delta_f H°$:

$$C_6H_6(l) + \frac{15}{2} O_2(g) \xrightarrow{\Delta H°} 6CO_2(g) + 3H_2O(l)$$

$$-\Delta H°_f \downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow 3\Delta H°_{f,H_2O(l)}$$

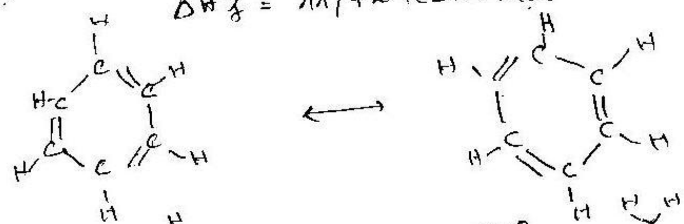
$$6C(s) + 3H_2(g) + \frac{15}{2} O_2(g) \xrightarrow{6\Delta_f H°, CO_2(g)} 6CO_2(g) + 3H_2(g) + \frac{3}{2} O_2(g)$$

$$\Rightarrow \Delta_f H° = -\Delta H°_f + 6\Delta H°_{f,CO_2(g)} + 3\Delta H°_{f H_2O(l)}$$

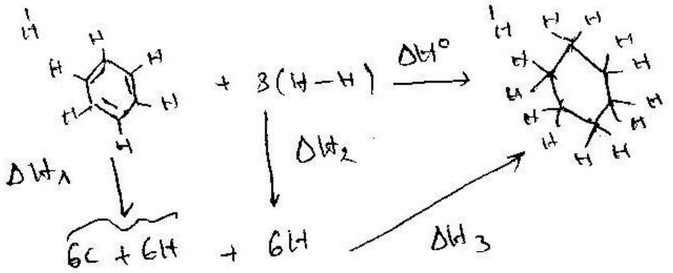
on en déduit :

$$\Delta H°_f = -\Delta H° + 6\Delta H°_{f, CO_2(g)} + 3\Delta H°_{f, H_2O(l)}$$

AN : $\Delta H°_f = 11{,}72 \text{ Kcal.mol}^{-1}$



3°) – a) –



$\Delta H_1 = 3E_{C=C} + 3E_{C-C} + 6E_{C-H}$

$\Delta H_2 = 3E_{H-H}$

$\Delta H_3 = -(6E_{C-C} + 12E_{C-H})$

$\Delta H° = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3$ ou $\Delta H° = 3E_{C=C} + 3E_{H-H} - 3E_{C-C} - 6E_{C-H}$

AN : $E_{C=C} = 154 \text{ Kcal/mol}$; $E_{H-H} = 103 \text{ Kcal/mol}$

$E_{C-C} = 80 \text{ kcal/mol}$; $E_{C-C} = 98 \text{ kcal}$

On trouve : $\Delta H° = -84 \text{ Kcal/mol}$.

Fin

www.rapideway.org/vb