**Chapitre III** **THEOREME DE GAUSS**

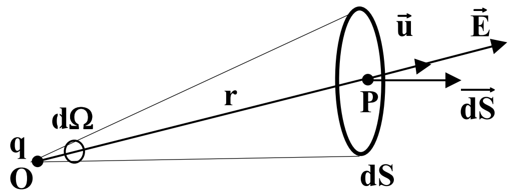
Dans ce chapitre, nous allons introduire, une formulation différente des lois de l'électrostatique. Cette formulation ne modifie en aucun cas les principes de base que nous avons développés par la loi de Coulomb, mais elle permet le calcul plus facile et efficace des effets des charges électriques. La formulation de Gauss repose sur la notion de flux.

## I- Flux du champ électrostatique $\vec{E}$ crée par une charge ponctuelle :

### 1- Flux de $\vec{E}$ à travers un élément de surface dS

On considère une charge ponctuelle q, située en un point O de l'espace.

Le flux du champ électrostatique $\vec{E}$, crée par cette charge, à travers une surface élémentaire quelconque orientée est par définition :




$$d\Phi = \vec{E}.dS.\vec{n} = \vec{E}.\overrightarrow{dS}$$

A partir du champ crée par une charge ponctuelle q : $\vec{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o}.\dfrac{\overrightarrow{OP}}{OP^3} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{\vec{u}}{r^2}$

On obtient alors:

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\frac{\vec{u}.\vec{n}}{r^2}dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}d\Omega$$

d'où: $$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}d\Omega$$

avec **dΩ** : l'angle solide élémentaire sous lequel on voit à partir de O l'élément de surface

**dS** : $$d\Omega = \frac{\vec{u}.\overrightarrow{dS}}{r^2}.$$

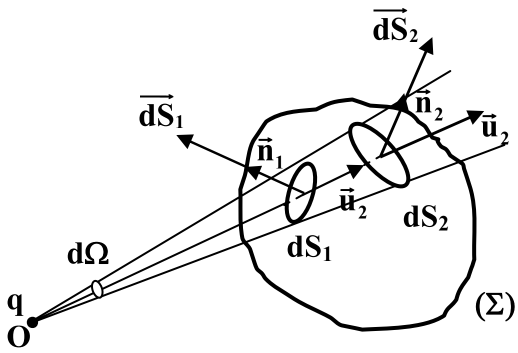
Le flux dépend directement de l'angle solide sous lequel est vue la surface est non de la distance **r**.

**Remarque** : L'angle solide élémentaire **dΩ** est toujours positif, la charge q pouvant être positive ou négative.

### 2- Flux de $\vec{E}$ à travers une surface fermée Σ

#### a- La charge q à l'extérieur de Σ

Considérons une charge ponctuelle située en O à l'extérieur de la surface **Σ** (Σ enfermant un volume τ)




Soit un tube de champ élémentaire d'angle solide élémentaire **dΩ. dΩ** découpe sur la surface **Σ** deux éléments de surfaces **dS₁** et **dS₂. dS₁** et **dS₂** sont vues respectivement à partir de O sous le même angle solide **dΩ.** Les vecteurs unitaires $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont orientés vers l'extérieur.

Les flux sortant du champ électrostatique E à travers ces éléments de surface **dS₁** et **dS₂** sont :

* pour **dS₁** : $$d\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{\vec{u}_1.\vec{n}_1}{r_1^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}(-d\Omega)$$

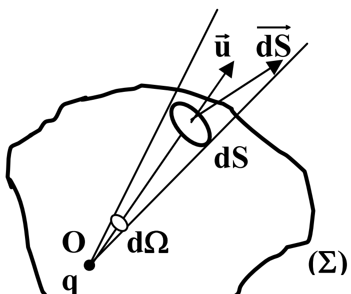
* pour **dS₂** : $$d\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{\vec{u}_2.\vec{n}_2}{r_2^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}d\Omega$$

Il en résulte que le flux sortant à travers **dS₁** et **dS₂** est : $d\Phi = d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$

Il en est de même pour tous les cônes élémentaires qu'on peut former en balayant la surface fermée **Σ**. Par conséquent le flux total Φ crée par la charge **q** à travers toute la surface fermée **Σ** est nul :

$$\Phi = 0$$

**b – La charge q à l'intérieur de Σ**




Considérons maintenant une charge ponctuelle **q** à l'intérieur de la surface fermée **Σ**. Soit un tube de champ élémentaire, d'angle solide élémentaire **dΩ,** découpe sur la surface **Σ** un élément de surface **dS**.

Le flux de $\vec{E}$ à travers **dS** est :

$$d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}d\Omega$$

Le flux total de $\vec{E}$ à travers **Σ** fermée est :

$$\Phi = \iint_\Sigma d\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\iint_\Sigma d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\Omega_T$$

$\mathbf{\Omega_T}$ est l'angle solide total sous lequel la surface fermée $\mathbf{\Sigma}$ est vue depuis l'origine O où elle est placée la charge **q**. $\mathbf{\Omega_T}$ est égal à **4π sr.**

D'où : $\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\varepsilon_0}$ soit $\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0}$

**c- <u>Cas général</u>** :

Ces résultats se généralisent aisément à un ensemble quelconque de charges (charges ponctuelles ou continues) et pour n'importe quelle surface fermée entourant une distribution de charges.

Considérons une surface S fermée, à l'intérieur de cette surface, il y a n charges $q_1$, $q_2$, $q_3$, …….$q_i$,….$q_n$ et à l'extérieur m charges $q'_1$, $q'_2$, $q'_3$, ….$q'_i$,….$q'_m$ .
En tenant compte du principe de la superposition, le flux total Φ est :

$$\Phi = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i$$

d'où

$$\Phi = \oiint \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$\mathbf{Q = \Sigma q_i}$ est la somme des charges à l'intérieur de la surface fermée **Σ**.

Pour les distributions continues :

- Distribution linéique : $Q = \int_{(\Gamma)} \lambda dl$ ; dl un déplacement élémentaire d'une courbe Γ et **λ** la densité linéique de charge.
- Distribution surfacique : $Q = \iint_S \sigma dS$ ; dS élément de la surface S et **σ** la densité surfacique de charge.
- Distribution volumique : $Q = \iiint_\tau \rho d\tau$ ; dτ élément de volume et **ρ** densité volumique de charge.

**3 - <u>Enonce du théorème de Gauss</u>** :

**Le flux sortant du champ électrique à travers une surface fermée, orientée et quelconque, est égal, dans le vide, au quotient par $\varepsilon_0$ de la somme algébrique des charges placées à l'intérieur de la surface fermée.**

Ce théorème permet le calcul du champ électrique $\vec{E}$ :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$$

La constante $\varepsilon_0$ est la permittivité du vide.

**Remarques** :

- Le flux $\Phi$ est indépendant de la répartition géométrique des charges à l'intérieur de la surface fermée $\Sigma$ et à la présence des charges extérieures à $\Sigma$.

- Du point de vue physique, le théorème de Gauss fournit le lien entre le flux du champ électrostatique et les sources du champ, à savoir les charges électriques.

- La démonstration précédente utilise la loi de Coulomb qui, elle, est un fait expérimental et n'est pas démontrée. Inversement, on peut retrouver la loi de Coulomb à partir du théorème de Gauss.

## II- Symétrie et surface de Gauss

### 1- Invariance et règles de symétrie

Le théorème de Gauss fournit une méthode très utile pour calculer le champ $\vec{E}$ lorsque celui ci possède des propriétés de symétrie particulières. Celles-ci doivent en effet permettre d'établir la configuration des lignes de champ en n'importe quel point, et par la suite le calcul facile du flux $\Phi$ du champ $\vec{E}$.

Nous nous contenterons par la suite de donner quelques règles de symétrie utiles.

Soit (S) le système de charges créant un champ éléctrostatique $\vec{E}$,

**Invariance par translation** : si (S) est invariant dans toute translation parallèle à un axe Oz, alors les effets (ici le champ) sont indépendants de z.

**Invariance par rotation**: si (S) est invariant dans toute rotation autour d'un axe Oz, alors ses effets sont indépendants de $\theta$ (coordonnées cylindriques)

**Symétrie sphérique** : si (S) est invariant dans toute rotation autour d'un point fixe O, alors ses effets (exprimés en coordonnées sphériques $(r, \varphi, \theta)$ ) ne dépendent que de la distance r au centre .

**Plan de symétrie**: si (S) admet un plan de symétrie, alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique est contenu dans ce plan.

**Plan d'antisymétrie** : si, par symétrie par rapport à un plan, (S) est transformé en –(S), alors en tout point de ce plan, le champ électrostatique lui est perpendiculaire.

**Axe de symétrie**: si (S) admet un axe de symétrie, alors en tout point de cet axe, le champ électrostatique est porté par cet axe.

**2– Choix de la surface de Gauss** :

Comme le théorème de Gauss est valable pour une surface quelconque, il nous suffit de trouver une surface Σ adaptée, c'est à dire une surface respectant les propriétés de symétrie du champ, appelée « surface de Gauss ». Cette surface est fermée et imaginaire. Elle est choisie de façon que les distributions de charges considérées représentent un élément (ou des éléments) de symétrie pour cette surface, pour laquelle le champ $\vec{\mathbf{E}}$ et l'élément de surface $\overrightarrow{\mathbf{dS}}$ soient colinéaires ($\vec{\mathbf{E}} // \overrightarrow{\mathbf{dS}}$) ou perpendiculaires ($\vec{\mathbf{E}} \perp \overrightarrow{\mathbf{dS}}$) en tout point de cette surface.

C'est à dire :

$$\mathbf{\Phi} = \iint_\Sigma \vec{\mathbf{E}}\overrightarrow{\mathbf{dS}} = \begin{cases} \vec{\mathbf{E}}\overrightarrow{\mathbf{dS}} = \pm \mathbf{EdS} \quad \mathbf{si} \quad \vec{\mathbf{E}} // \overrightarrow{\mathbf{dS}} \\ \\ \vec{\mathbf{E}}\overrightarrow{\mathbf{dS}} = \mathbf{0} \quad \mathbf{si} \quad \vec{\mathbf{E}} \perp \overrightarrow{\mathbf{dS}} \end{cases}$$

**Remarques :**

- La surface de Gauss ne doit pas passer par les charges dans une distribution de charges ponctuelles.
- Pour une distribution linéique ou surfacique la surface de Gauss ne doit pas être confondue avec la ligne (fil, spire,…) ou la surface chargée (sphère chargée en surface, plan infini,..)
- Pour les distributions volumiques, aucune interdiction (sphère ou cylindre chargée en volume)

## III - Equation locale pour le champ et le potentiel :

### 1- Forme locale du théorème de Gauss :

Le théorème de Gauss, tel que nous l'avons présenté, est apparu sous une forme globale. Le flux à travers une surface fermée est relié à la quantité de charges intérieures à ce volume indépendamment du détail de leur distribution .

Considérons une surface fermée **Σ** et un volume **τ** limité par la surface **Σ,** on a d'après la relation de Green-Ostrogradsky:

$$\mathbf{\Phi} = \oiint_\Sigma \vec{\mathbf{E}}.\overrightarrow{\mathbf{dS}} = \iiint_\tau \mathbf{div}\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{M}).\mathbf{d}\tau$$

Supposons que les charges sont réparties de façon continue dans le volume τ, intérieur à la surface Σ. D'après le théorème de Gauss on a :

$$\Phi = \frac{Q_i}{\varepsilon_o} \qquad \text{avec} \qquad Q_i = \iiint_\tau \rho d\tau$$

ρ étant la densité de charge volumique. D'autre part $\Phi = \iiint_\tau \mathrm{div}\vec{E}(M)d\tau$

Puisque le volume **τ** est quelconque, on obtient par comparaison :

$$\mathrm{div}\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_o}$$

Cette équation est la forme locale du théorème de Gauss autour d'un point. Elle relie, en chaque point de l'espace, la divergence du champ à la densité de charge volumique en ce même point.

Le théorème de Gauss existe donc sous deux formes :

- Forme dite intégrale : $\Phi = \iiint_\Sigma \vec{E}.\overrightarrow{dS} = \frac{\sum Q_i}{\varepsilon_o}$

- Forme locale autour d'un point : $\mathrm{div}\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_o}$

### 1- Equation de Poisson :

La combinaison de la forme locale du théorème de Gauss: $\mathrm{div}\vec{E}(M) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_o}$ et de la Relation: $\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}V$ conduit à l'équation de Poisson.

En effet : $$\mathrm{div}\vec{E}(M) = -\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}V(M)) = \frac{\rho(M)}{\varepsilon_o}$$

or $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}V) = \frac{\delta}{\delta x}\left(\frac{\delta V}{\delta x}\right) + \frac{\delta}{\delta y}\left(\frac{\delta V}{\delta y}\right) + \frac{\delta}{\delta z}\left(\frac{\delta V}{\delta z}\right) = \frac{\delta^2 V}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 V}{\delta z^2} = \Delta$

où Δ est l'opérateur Laplacien .

D'où l'équation de Poisson :

$$\Delta(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_o} = 0$$

### 2- Equation de Laplace

En un point où il n'y a pas de charges **ρ(M) = 0, ΔV(M) = 0,** c'est l'équation de Laplace