

## CHAMP ET POTENTIEL ELECTROSTATIQUES

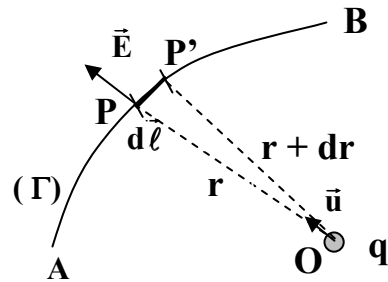
### II – Potentiel électrique :

#### 1 – Circulation du champ électrique créée par une charge ponctuelle :

Soit une charge  $q$  et une courbe  $(\Gamma)$  non chargée dans le vide. Le champ créé au point  $P$  de la courbe  $(\Gamma)$  est :

$$\vec{E}_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}$$

avec  $\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$



La circulation de  $\vec{E}$  le long de la courbe  $(\Gamma)$  est :

$$C = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} d\vec{l}$$

or  $\vec{OP}' = \vec{OP} + \vec{PP}'$  avec  $\vec{OP}' = \vec{r} + d\vec{r}$ ,  $\vec{OP} = \vec{r}$  et  $\vec{PP}' = d\vec{l}$  d'où  $d\vec{l} = \vec{PP}' = d\vec{r}$

ainsi 
$$C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot d\vec{r}$$

sachant que:  $\vec{r} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = r dr$

on aura: 
$$C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_A^B \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B} = V_A - V_B$$

Nous constatons que la circulation de  $\vec{E}$  est indépendante du chemin suivi. Elle ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée.

Si la courbe  $(\Gamma)$  est fermée, la circulation de  $\vec{E}$  est nulle. La circulation du champ est donc conservative.

On pose :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \text{cste}$$

$V(r)$  est le potentiel électrique créée par la charge  $q$  au point  $P$  à la distance  $r$  de  $q$ .

En fait, le potentiel électrique est défini à une constante près. Il est bien évident que si on ajoute une constante quelconque à l'expression de  $V(r)$ , le champ électrique  $\vec{E}$ , et donc les forces qui s'exerceront sur des charges placées en  $M(\mathbf{r})$ , sont inchangés.

**Remarque :**

S'il n'y a pas de charges à l'infini, on prendra  $V(\infty) = 0$ . S'il y a des charges à l'infini, il faut choisir une origine des potentiels.

Pour la charge ponctuelle la constante est définie par :  $V(\infty) = 0 + cste = 0$  ce qui donne une constante nulle ( $cste = 0$ )

d'où: 
$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Le potentiel d'une charge ponctuelle est un champ scalaire. En chaque point du voisinage de la charge, le potentiel prend une valeur numérique (un scalaire) s'exprimant en Volts (V).

**2 – Potentiel crée par un ensemble de charges :**

**a – Répartition discontinue de charges :**

Nous avons vu précédemment que le champ électrique créé par une distribution de charges était égal à la somme vectorielle des champs électriques créés par chacune de ces charges si elle était seule. De même, le potentiel électrique créé par une distribution de charges est égal à la somme algébrique des potentiels électriques créés par chacune de ces charges si elle était seule :

$$V(\mathbf{r}) = \sum_i V_i(\mathbf{r})$$

avec  $V_i(\mathbf{r}) = \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}$ ,  $V_i(\mathbf{r})$  est le potentiel crée par la charge  $q_i$  au point  $M(\mathbf{r})$ .

**b – Distributions continues de charges :**

La détermination du potentiel d'une distribution de charges continue utilise à la fois l'expression du potentiel d'une charge ponctuelle et le principe de superposition.

Si la distribution de charges est finie (donc pas de charge à l'infini) on aura alors les expressions suivantes :

Pour une distribution de charge linéique  $\lambda$  :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Gamma} \frac{\lambda}{r} \cdot dl$$

Pour une distribution surfacique  $\sigma$ :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iint_s \frac{\sigma d\mathbf{s}}{r}$$

Pour une distribution volumique  $\rho$ :

$$V(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \iiint_\tau \frac{\rho d\tau}{r}$$

**Si la distribution de charge est infinie (la constante d'intégration ne peut plus être considérée comme nulle), il ne sera donc plus possible de déterminer le potentiel par un calcul direct. Sa détermination ne peut se faire qu'à partir de l'expression du champ électrostatique en utilisant la relation qui sera établie au paragraphe suivant.**

### **3 – Relation entre le champ et le potentiel en un point donné :**

Soit un potentiel  $V(\mathbf{M})$  créé par une charge ponctuelle,  $n$  charges ponctuelles ou par une distribution continue quelconque au un point  $\mathbf{M}(x,y,z)$ , on a par définition :

$$V(\mathbf{M}) = -\int_\infty^A \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad \text{ou encore} \quad dV(\mathbf{M}) = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$\vec{E}$  et  $d\vec{l}$  ont respectivement pour composantes :  $E_x, E_y, E_z$  et  $dx, dy, dz$ .

d'où 
$$dV(\mathbf{M}) = - (E_x \cdot dx + E_y \cdot dy + E_z \cdot dz) \quad (1)$$

Si le potentiel  $V(\mathbf{M})$  est une fonction continue au voisinage du point  $\mathbf{M}$  et possède des dérivées partielles, alors la variation de  $V(\mathbf{M})$  est une différentielle totale :

$$dV(\mathbf{M}) = \frac{\partial V(\mathbf{M})}{\partial x} dx + \frac{\partial V(\mathbf{M})}{\partial y} dy + \frac{\partial V(\mathbf{M})}{\partial z} dz \quad (2)$$

Par identification des relations (1) et (2), les composantes du vecteur  $\vec{E}$  sont :

$$E_x = -\frac{\partial V(\mathbf{M})}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V(\mathbf{M})}{\partial y} \quad \text{et} \quad E_z = -\frac{\partial V(\mathbf{M})}{\partial z}$$

d'où 
$$\vec{E}(\mathbf{M}) = -\overline{\text{grad}V(\mathbf{M})}$$

D'une façon générale, à partir d'un champ scalaire, il est possible de construire un champ vectoriel dont les composantes en coordonnées cartésiennes sont données par la relation:

$$\vec{E}(\mathbf{M}) = -\overline{\text{grad}V(\mathbf{M})}$$

Conséquence :

- Le champ  $\vec{E}$  dérive d'un potentiel  $V$ .

- Le champ  $\vec{E}$  a le même module que celui du vecteur  $\overline{\text{grad}}$ , mais orienté dans le sens des potentiels décroissants.
- Si le potentiel est exprimé en volt (V), alors le champ est exprimé en volt par mètre (V/m).

#### 4 – Topographie du potentiel :

##### 1 – Surfaces équipotentiels :

Les surfaces équipotentiels sont des surfaces sur lesquelles le potentiel reste constant.

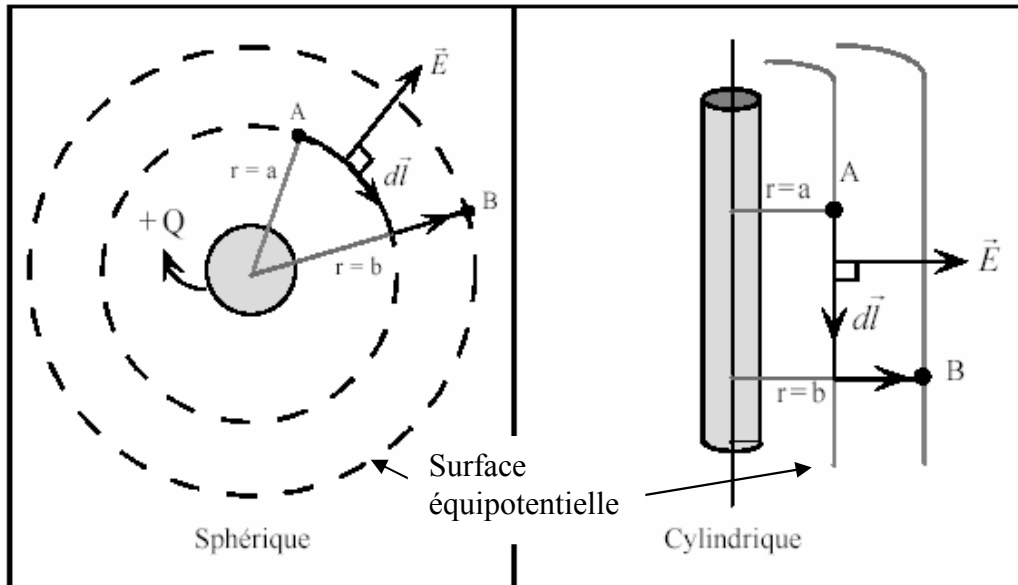
**Exemple** : Surfaces équipotentiels d'une charge ponctuelle :

Le potentiel crée par une charge ponctuelle est :  $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$

Surface équipotentielle implique que:  $V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{cste}$  d'où  $r = \text{cste}$ .

Cette équation est celle d'une sphère, les surfaces équipotentiels d'une charge ponctuelle sont donc des sphères centrées sur la charge..

Les surfaces équipotentiels associées à des charges à symétrie sphérique (charge ponctuelle ou de configuration sphérique) sont des surfaces sphériques dont le centre coïncide avec celui de la distribution des charges (voir figure). Dans le cas de celles à symétrie cylindrique (long fil droit, cylindres coaxiaux, etc), les surfaces équipotentiels sont cylindriques et centrées sur l'axe de la distribution (voir figure). Dans le cas des charges sources sur des surfaces planes, les équipotentiels sont des plans parallèles à celui de la distribution.



Distribution sphérique

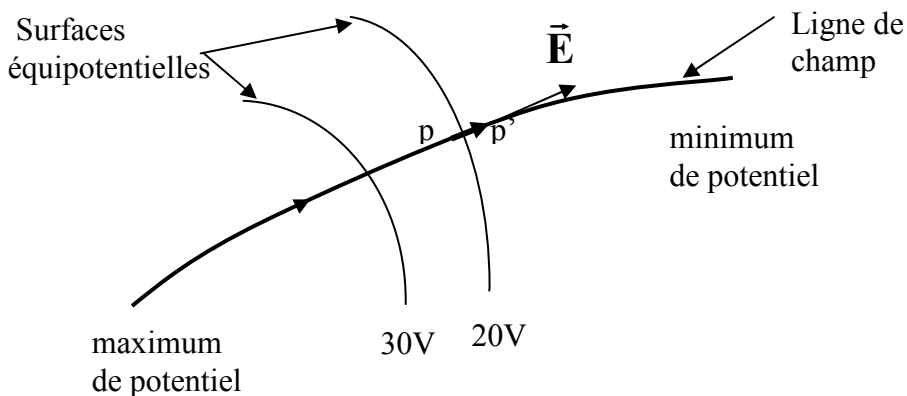
Distribution cylindrique

## 2- Propriétés

**a** – Si  $d\vec{l}$  est un déplacement élémentaire quelconque sur une surface équipotentielle on a :  $\vec{E}d\vec{l} = -dV$  et puisque  $V = \text{cste}$  on a  $dV = 0$  d'où  $\vec{E}d\vec{l} = 0$ .

Il en résulte donc que  $\vec{E}$  est perpendiculaire à la surface équipotentielle (voir figure). Ceci implique que les lignes de champ sont toujours orthogonales aux surfaces équipotentielles.

**b** – Le potentiel diminue quand on suit une ligne de champ



La circulation élémentaire de  $\vec{E}$  est  $dC = \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \cdot dl > 0$  avec  $d\vec{l} = p p'$

Or  $dC = -dV$  ce qui implique que  $dV < 0$ . Il en résulte que le potentiel diminue lorsqu'on passe de p en p'. La ligne de champ part donc d'un maximum de potentiel et arrive à un minimum de potentiel.

**c** – Les lignes de champ et les surfaces équipotentielles se resserrent en même temps dans les régions où le champ est plus intense.