

Chapitre V : La magnétostatique dans les milieux aimantés

Introduction :

En présence d'un champ magnétique extérieur $\vec{B}_e$, la matière s'aimante et crée donc un champ magnétique qui s'ajoute à $\vec{B}_e$.

Un milieu aimanté est un milieu dont chaque élément de volume dv se comporte comme un dipôle magnétique de moment magnétique $d\vec{m}$.

Il existe des matériaux qui sont aimantés en absence de champ magnétique extérieur. Ces matériaux sont appelés des aimants.

I. Etude macroscopique de l'aimantation :

I. 1. Le phénomène d'aimantation :

Considérons un volume v d'un matériau placé dans un champ magnétique extérieur $\vec{B}_e$. Ce matériau peut contenir des atomes ayant un moment magnétique intrinsèque $\vec{m}_i$ non nul ou nul :

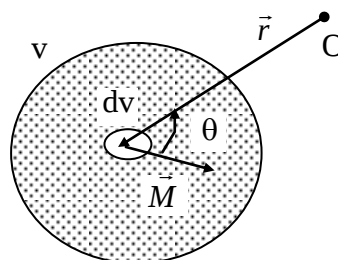
- Pour les atomes qui ont un moment magnétique intrinsèque $\vec{m}_i$ non nul, ces moments s'orientent dans le sens de $\vec{B}_e$.
- Pour les atomes qui ont un moment magnétique intrinsèque nul, les moments magnétiques dus à la rotation des électrons autour du noyau s'orientent dans le sens de $\vec{B}_e$.

Dans tous les cas de milieux aimantés, chaque élément de volume dv du milieu est donc l'équivalent d'un dipôle de moment magnétique $d\vec{m}$. Le rapport $\frac{d\vec{m}}{dv} = \vec{M}$, qui représente le moment magnétique par unité de volume, est appelé vecteur aimantation.

I. 2. Potentiel vecteur et champ magnétique créés par un milieu aimanté :

Considérons un volume v d'un milieu aimanté.

Figure V-1



Le potentiel vecteur élémentaire $d\vec{A}_m$ créé, en un point O , par un élément de volume dv du milieu aimanté est :

$$d\vec{A}_m = \frac{\mu_0 d\vec{m} \wedge -\vec{r}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 \vec{M} \wedge -\vec{r}}{4\pi r^3} dv = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{M} \wedge \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right) dv \Rightarrow \vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \vec{M} \wedge \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right) dv$$

Or :

$$\overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) = \frac{1}{r} \overrightarrow{rot}\vec{M} + \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right) \wedge \vec{M} \Rightarrow \vec{M} \wedge \overrightarrow{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} \overrightarrow{rot}\vec{M} - \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right)$$

Donc :

$$\vec{A}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) dv + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{1}{r} \overrightarrow{rot}\vec{M} dv$$

Si $\vec{a}$ est un vecteur constant quelconque et S la surface limitant le volume v du milieu aimanté, alors :

$$\begin{aligned} \vec{a} \iiint_v \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) dv &= \iiint_v \vec{a} \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) dv = \iiint_v \text{div}\left(\frac{\vec{M}}{r} \wedge \vec{a}\right) dv - \iiint_v \frac{\vec{M}}{r} \overrightarrow{rot}\vec{a} dv \\ &= \iiint_v \text{div}\left(\frac{\vec{M}}{r} \wedge \vec{a}\right) dv = \oiint_S \left(\frac{\vec{M}}{r} \wedge \vec{a}\right) d\vec{s} = \oiint_S \left(\frac{\vec{M}}{r} \wedge \vec{a}\right) \vec{n} ds \\ &= \oiint_S \left(\vec{n} \wedge \frac{\vec{M}}{r}\right) \vec{a} ds = \vec{a} \oiint_S \left(\vec{n} \wedge \frac{\vec{M}}{r}\right) ds \end{aligned}$$

où $\vec{n}$ un vecteur unitaire perpendiculaire à S orienté vers l'extérieur du volume v .

Donc :

$$\iiint_v \overrightarrow{rot}\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) dv = \oiint_S \left(\vec{n} \wedge \frac{\vec{M}}{r}\right) ds$$

D'où :

$$\vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_S \frac{\vec{M} \wedge \vec{n}}{r} ds + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{\overrightarrow{rot}\vec{M}}{r} dv$$

Soit :

$$\vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_S \frac{\vec{j}_{sm}}{r} ds + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{\vec{j}_{vm}}{r} dv \quad \text{avec : } \vec{j}_{sm} = \vec{M} \wedge \vec{n} \text{ et } \vec{j}_{vm} = \overrightarrow{rot}\vec{M}.$$

$\vec{A}_m$ est donc le potentiel vecteur créé par des courants en surface de densité $\vec{j}_{sm}$ et en volume de densité $\vec{j}_{vm}$.

$\vec{j}_{sm}$ et $\vec{j}_{vm}$ sont des vecteurs densités de courants fictifs appelées densités de courants d'aimantation.

Le champ Magnétique $\vec{B}_m$, créé par le milieu aimanté, en un point quelconque de l'espace est donc :

$$\vec{B}_m = \overrightarrow{rot}\vec{A}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \oiint_S \frac{\vec{j}_{sm} \wedge \vec{r}}{r^3} ds + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_v \frac{\vec{j}_{vm} \wedge \vec{r}}{r^3} dv$$

où $\vec{r}$ est le vecteur position du point de l'espace par rapport au centre de l'élément ds ou de l'élément dv ($\vec{r}$ est dans le sens inverse de celui indiqué sur la figure V-1).

Remarque :

Le champ $\vec{B}_m$ peut être calculé par application du théorème d'Ampère si la symétrie de la distribution des courants d'aimantation le permet.

II. Les équations de la magnétostatique en présence d'un milieu aimanté :

II. 1 . Cas d'un milieu quelconque :

En présence d'un milieu aimanté, le champ magnétique $\vec{B}$ est la superposition du champ extérieur $\vec{B}_e$ et du champ d'aimantation $\vec{B}_m$:

$$\begin{aligned}\vec{B} = \vec{B}_e + \vec{B}_m &\Rightarrow \vec{\text{rot}}\vec{B} = \vec{\text{rot}}\vec{B}_e + \vec{\text{rot}}\vec{B}_m = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_m = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_m) = \mu_0 \vec{j}_t \\ &\Rightarrow \vec{\text{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_t\end{aligned}$$

où $\vec{j}_t = \vec{j} + \vec{j}_m$ et le vecteur densité de courant total.

$$\text{div}\vec{B} = \text{div}\vec{B}_e + \text{div}\vec{B}_m = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \text{div}\vec{B} = 0$$

Si on introduit le vecteur excitation magnétique $\vec{H}$, défini par :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

les équations de la magnétostatique pour $\vec{H}$ s'écrivent :

$$\begin{aligned}\text{div}\vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \text{div}\vec{B} - \text{div}\vec{M} = -\text{div}\vec{M} \Rightarrow \text{div}\vec{H} = -\text{div}\vec{M} \\ \text{et } \vec{\text{rot}}\vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{\text{rot}}\vec{B} - \vec{\text{rot}}\vec{M} = \vec{j}_t - \vec{j}_m = \vec{j} + \vec{j}_m - \vec{j}_m = \vec{j} \Rightarrow \vec{\text{rot}}\vec{H} = \vec{j}\end{aligned}$$

Remarque :

$$\vec{\text{rot}}\vec{H} = \vec{j} \Rightarrow \oint_C \vec{H} d\vec{\ell} = \iint_S (\vec{\text{rot}}\vec{H}) d\vec{s} = \iint_S \vec{j} d\vec{s} = I$$

où I est le courant réel qui traverse toute surface S limitée par le contour C.

Cette relation, analogue à la forme intégrale du théorème d'Ampère pour $\vec{B}$, constitue le théorème d'Ampère pour $\vec{H}$

II. 2. Cas des milieux LHI :

Dans un milieu linéaire, homogène et isotrope (LHI), le vecteur excitation magnétique $\vec{H}$ et lié au vecteur champ magnétique $\vec{B}$ par une relation linéaire de la forme :

$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$

où μ est une constante appelée perméabilité magnétique du milieu.

Or :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

Donc :

$$\mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu \vec{H} \Rightarrow \vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1 \right) \vec{H} = (\mu_r - 1) \vec{H} \Rightarrow \vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

où $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$ est la perméabilité magnétique relative (du milieu par rapport au vide) et $\chi_m = (\mu_r - 1)$ est la susceptibilité magnétique du milieu.

Dans un milieu LHI de perméabilité magnétique μ :

$$\text{div} \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{H} = \text{div} \left(\frac{\vec{B}}{\mu} \right) = \frac{\text{div} \vec{B}}{\mu} = 0 \Rightarrow \text{div} \vec{H} = 0$$

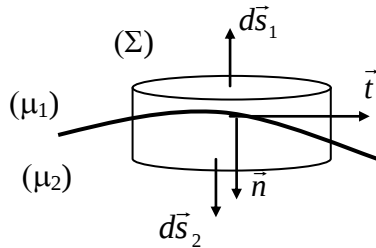
$$\text{et } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{\text{rot}} (\mu \vec{H}) = \mu \vec{\text{rot}} \vec{H} = \mu \vec{j} \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu \vec{j}$$

III. Relations de passage pour $\vec{B}$ et $\vec{H}$:

III. 1. Composantes normales :

Considérons une surface, parcourue par un courant de densité $\vec{j}$, séparant deux milieux (1) et (2) de perméabilités magnétiques respectives μ_1 et μ_2 .

Figure V-2



Dans le milieu (1) :

$$\vec{B} = \vec{B}_1 = B_{1n} \vec{n} + B_{1t} \vec{t}$$

et dans le milieu (2) :

$$\vec{B} = \vec{B}_2 = B_{2n} \vec{n} + B_{2t} \vec{t} .$$

Si on prend comme surface fermée Σ un cylindre de surface de base S_b petite (de sorte que B_{1n} et B_{2n} peuvent être considérés comme constants sur S_{b1} et S_{b2}) et de hauteur infiniment petite (de sorte qu'on reste au voisinage de la surface de séparation entre les deux milieux) :

$$\oiint_{\Sigma} \vec{B} d\vec{s} = 0 \Rightarrow \iint_{Sb_1} \vec{B}_1 d\vec{s}_1 + \iint_{Sb_2} \vec{B}_2 d\vec{s}_2 = 0$$

$$\Rightarrow -B_{1n}Sb_1 + B_{2n}Sb_2 = 0 \Rightarrow B_{2n} - B_{1n} = 0 \quad (\text{car } Sb_1 = Sb_2 = S_b)$$

Il y a donc continuité de la composante normale de $\vec{B}$ à la traversée d'une surface de séparation entre deux milieux.

Remarque :

Si les deux milieux sont LHI, alors :

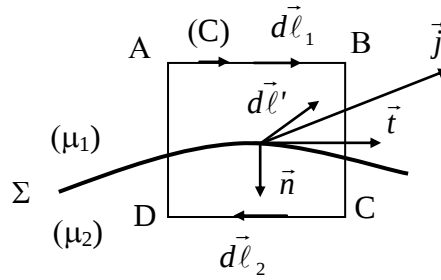
$$B_{2n} - B_{1n} = 0 \Rightarrow \mu_2 H_{2n} - \mu_1 H_{1n} = 0$$

La composante normale de $\vec{H}$ est donc discontinue.

III. 2. Composantes tangentielles :

Considérons une surface Σ , parcourue par un courant de densité $\vec{j}$, séparant deux milieux (1) et (2) de perméabilités magnétiques respectives μ_1 et μ_2 .

Figure V-3



Dans le milieu (1) :

$$\vec{H} = \vec{H}_1 = H_{1n}\vec{n} + H_{1t}\vec{t}$$

et dans le milieu (2) :

$$\vec{H} = \vec{H}_2 = H_{2n}\vec{n} + H_{2t}\vec{t}$$

où $\vec{n}$ et $\vec{t}$ sont deux vecteurs unitaires respectivement normal et tangent à la surface de séparation. $\vec{t}$ et $\vec{j}$ sont dans le plan tangent à Σ .

$$\vec{\text{rot}}\vec{H} = \vec{j} \Rightarrow \oint_C \vec{H} d\vec{\ell} = \iint_S (\vec{\text{rot}}\vec{H}) d\vec{s} = \iint_S \vec{j} d\vec{s} = \int_L \vec{j} d\vec{\ell}' = I$$

où S est une surface quelconque limitée par le contour C et $d\vec{\ell}' = d\ell' \vec{t}'$.

avec : $\vec{t}' = \vec{t} \wedge \vec{n}$ et $\vec{n}$ est dirigé de (1) vers (2).

Si on choisit comme contour C un rectangle ABCD de longueur L , parallèle à $\vec{t}$, suffisamment faible (de sorte que $\vec{H}$ soit pratiquement constant sur L) et de largeur ℓ infiniment petite (de sorte qu'on reste au voisinage de la surface de séparation) on peut donc écrire :

$$\oint_C \vec{H} d\vec{\ell} = \int_{AB} \vec{H}_1 d\vec{\ell}_1 + \int_{CD} \vec{H}_2 d\vec{\ell}_2 = H_{1t}L - H_{2t}L$$

$$\left(\int_{BC} \vec{H} d\vec{\ell} = \int_{DA} \vec{H} d\vec{\ell} = 0 \text{ car } BC = DA = \ell \rightarrow 0 \right)$$

D'autre part :

$$I = \int_L \vec{j} d\vec{\ell}' = \int_L \vec{j} \vec{t}' d\ell' = \vec{j} \vec{t}' L$$

Donc :

$$H_{1t}L - H_{2t}L = \vec{j} \vec{t}' L \Rightarrow H_{1t} - H_{2t} = \vec{j} \vec{t}' = \vec{j} (\vec{t} \wedge \vec{n})$$

Ou encore :

$$\vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t} = (\vec{j} (\vec{t} \wedge \vec{n})) \vec{t} = ((\vec{n} \wedge \vec{j}) \vec{t}) \vec{t}$$

Remarques :

- Si $\vec{j}$ et perpendiculaire à $\vec{t}$ alors :

$$\vec{j} (\vec{t} \wedge \vec{n}) = \vec{j} \vec{t}' = j \Rightarrow H_{1t} - H_{2t} = j$$

- Si la surface de séparation n'est parcourue par aucun courant réel, il y a continuité de la composante tangentielle de $\vec{H}$ à la traversée de cette surface.
- Si les deux milieux sont LHI, alors :

$$\vec{H}_{1t} - \vec{H}_{2t} = \frac{\vec{B}_{1t}}{\mu_1} - \frac{\vec{B}_{2t}}{\mu_2} = ((\vec{n} \wedge \vec{j}) \vec{t}) \vec{t}.$$

IV. Energie magnétique :

Considérons un volume v d'un milieu magnétique en présence d'un courant réel de densité $\vec{j}$. L'énergie magnétique W de ce système est donnée par :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{j} \vec{A} dv = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \vec{j} \vec{A} dv = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} (\vec{\text{rot}} \vec{H}) \vec{A} dv$$

Or :

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \text{rot} \vec{B}$$

Donc :

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} (\vec{\text{rot}} \vec{H}) \vec{A} dv = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \vec{H} \text{rot} \vec{A} - \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{H}) dv \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \vec{H} \vec{B} - \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{H}) dv \end{aligned}$$

Or :

$$\iiint_{\text{espace}} \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{H}) dv = \oint_S (\vec{A} \wedge \vec{H}) d\vec{s}$$

où S est la surface limitant tous l'espace qui peut être considérée comme une surface sphérique de rayon R infini.

Sur cette surface S , $\vec{A}$ et $\vec{H}$ peuvent être considérés comme étant le potentiel vecteur et l'excitation magnétique créés par un dipôle magnétique. $\vec{A}$ et $\vec{H}$ sont donc en $\frac{1}{R^2}$ et en $\frac{1}{R^3}$ respectivement; ce qui fait que $\vec{A} \wedge \vec{H}$ est en $\frac{1}{R^5}$.

D'autre part :

$$d\vec{s} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r .$$

Donc :

$$\iiint_{\text{espace}} \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) dv = \oint_S (\vec{A} \wedge \vec{B}) d\vec{s} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{KR^2}{R^5} = 0$$

où K est une constante qui résulte de l'intégration sur θ et φ .

D'où :

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\text{espace}} \vec{H} \vec{B} dv = \iiint_{\text{espace}} dW \quad \text{avec : } dW = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B} dv = \omega dv$$

où $\omega = \frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \vec{H} \vec{B}$ est la densité d'énergie magnétique.

V. Les différents types de milieux magnétiques :

Les milieux magnétiques sont groupés en trois catégories selon leur susceptibilité magnétique χ_m : les milieux diamagnétiques ($\chi_m < 0$), les milieux paramagnétiques ($\chi_m > 0$ mais faible) et les milieux ferromagnétiques ($\chi_m > 0$ et grande).

V. 1. Les milieux diamagnétiques :

Les milieux diamagnétiques sont des matériaux constitués d'atomes qui n'ont pas de moment magnétique intrinsèque (propre). Le phénomène d'aimantation de ces milieux, en présence d'un champ magnétique extérieur, est appelé diamagnétisme (c'est une aimantation électronique).

Ces milieux sont caractérisés par une faible susceptibilité magnétique χ_m qui est négative ($\chi_m \approx -10^{-5}$).

V. 2. Les milieux paramagnétiques :

Les milieux paramagnétiques sont des matériaux constitués d'atomes (ou de molécules) qui ont un moment magnétique intrinsèque (en absence de champ extérieur). Le phénomène d'aimantation de ces milieux en présence d'un champ magnétique extérieur est appelé paramagnétisme (c'est une aimantation d'orientation).

Ces milieux sont caractérisés par une susceptibilité magnétique χ_m positive plus grande (en valeur absolue) que celle des milieux diamagnétiques ($\chi_m \approx 10^{-3}$).

Le phénomène d'orientation des moments magnétiques intrinsèques est limité par l'agitation thermique ; ce qui fait que la susceptibilité magnétique des matériaux paramagnétiques est inversement proportionnelle à la température.

Remarque :

Dans les milieux aimantés paramagnétiques, le diamagnétisme existe toujours mais son effet est masqué par le paramagnétisme.

V. 3. Les milieux ferromagnétiques :

Les milieux ferromagnétiques sont des matériaux qui ont des propriétés magnétiques similaires à celles du Fer. Ce sont des matériaux qui sont capables d'acquérir une aimantation importante dans un champ magnétique extérieur même très faible et de conserver cette aimantation lorsque ce champ est supprimé. Ils sont donc caractérisés par une grande susceptibilité magnétique ($\chi_m \approx 10^3$ pour le fer) qui varie avec la température.

Pour des températures élevées, l'agitation thermique entraîne un désordre qui limite l'aimantation du milieu ferromagnétique. Celui-ci peut devenir alors paramagnétique.

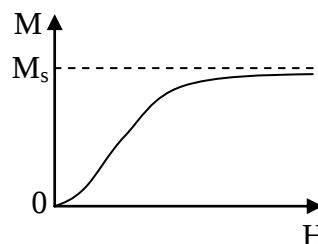
VI. Le ferromagnétisme :

VI. 1. Courbe de première aimantation :

Considérons un milieu ferromagnétique qui n'a jamais été aimanté (ou qui a été complètement désaimanté) que l'on place dans une région où le champ magnétique extérieur $\vec{B}_e$ peut être lentement augmenté à partir de zéro. On appelle courbe de première aimantation la courbe qui traduit la variation de l'aimantation M en fonction de l'excitation magnétique H .

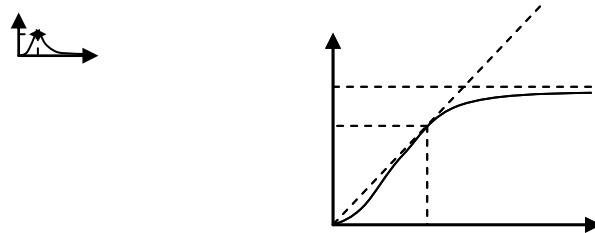
Cette courbe admet une asymptote horizontale qui traduit la saturation de l'aimantation : au delà d'une certaine valeur de H , M ne varie pratiquement plus. La valeur limite M_s est appelé aimantation à saturation.

Figure V-4



VI. 2. Variation de χ_m avec H :

Compte tenu de l'allure de la courbe de première aimantation, la perméabilité relative $\chi_m = \frac{M}{H}$ varie en fonction de H selon une courbe qui a l'allure ci-dessous.



La valeur H_0 qui correspond au maximum de χ_m peut être obtenue à partir de la courbe de première aimantation. En effet, en H_0 la dérivée de χ_m par rapport à H est nulle.

Soit :

$$\left. \frac{d\chi_m}{dH} \right|_{H_0} = \left. \frac{d\left(\frac{M}{H}\right)}{dH} \right|_{H_0} = \frac{1}{H_0} \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H_0} - \frac{M}{H_0^2} = 0$$

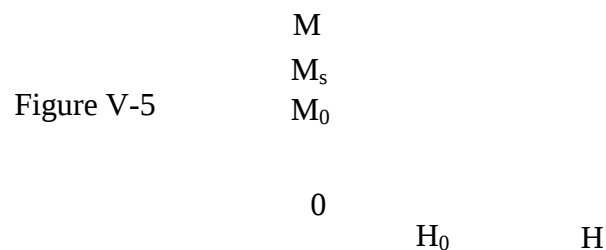
D'où :

$$\left. \frac{dM}{dH} \right|_{H_0} = \frac{M}{H_0} \Rightarrow M = M_0 = \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H_0} H_0$$

Si on considère la droite de pente $\left. \frac{dM}{dH} \right|_{H_0}$ et qui passe par l'origine :

$$M = \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H_0} H$$

Cette droite passe par (M_0, H_0) et elle est tangente à la courbe de première aimantation en ce point.



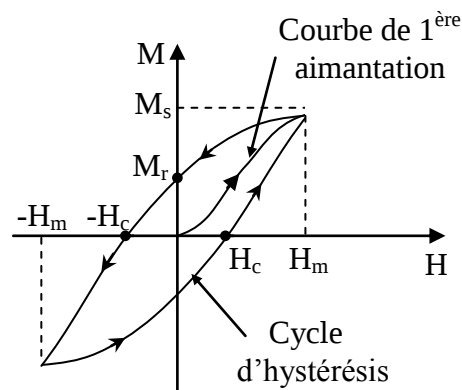
H_0 s'obtient donc (à partir de la courbe de première aimantation) en traçant la droite passant par l'origine et qui passe tangente à la courbe de première aimantation en un point donné ; ce point est le point (M_0, H_0) .

VI. 3. Cycle d'hystérésis :

Si on diminue lentement l'intensité du champ extérieur, après avoir atteint la saturation ($H = H_m$), on obtient une nouvelle courbe $M(H)$ qui ne repasse pas par les points de la courbe de première aimantation. Quand le champ s'annule, le milieu ferromagnétique reste aimanté avec une aimantation M_r dite aimantation rémanente. Pour désaimanter le matériau ferromagnétique (annuler l'aimantation M), il faut appliquer une excitation $-H_c$ (de sens contraire à l'excitation de première aimantation) appelée excitation coercitive.

Si on fait varier H entre H_m et $-H_m$, au bout de quelques allés-retours on obtient un cycle stable (qui a l'allure ci-contre) appelé cycle d'hystérésis. La forme de ce cycle dépend du matériau ferromagnétique utilisé, de la vitesse de variation de H et de la température.

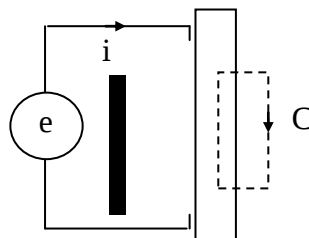
Figure V-6



VI. 4. Pertes d'énergie par hystérésis :

Considérons un barreau de fer placé dans un solénoïde parcouru par un courant d'intensité i variable débité par un générateur de f.e.m e variable.

Figure V-7



La loi des mailles, pour ce régime variable, s'écrit alors :

$$e - \frac{d\phi}{dt} - Ri = 0 \quad (1)$$

où R est la résistance du fil conducteur (du solénoïde) et ϕ est le flux de $\vec{B}$ à travers les surfaces des spires du solénoïde.

Si on multiplie l'équation (1) par idt puis on intègre l'équation obtenue, entre l'instant $t = 0$ (où $i = 0$, $H = 0$ et $B = B_0$) et l'instant $t = t_1$ (où $i = i_1$, $H = H_1$ et $B = B_1$), on obtient alors :

$$\int_0^{t_1} e idt = \int_{\phi_0}^{\phi_1} id\phi + \int_0^{t_1} Ri^2 dt \quad (2)$$

Or :

$$\phi = nlsB$$

où n est le nombre de spires par unité de longueur, ℓ est la longueur du solénoïde et s est la surface d'une spire du solénoïde.

Donc :

$$d\phi = nls dB \Rightarrow id\phi = nils dB = v ni dB \quad (v \text{ étant le volume du barreau}).$$

D'autre part, le théorème d'Ampère pour $\vec{H}$ permet d'écrire :

$$\oint_C \vec{H} d\vec{\ell} = nLi \Rightarrow HL = nLi \Rightarrow ni = H$$

où C est le contour fermé rectangulaire, de longueur L , représenté sur la figure V-7.

D'où :

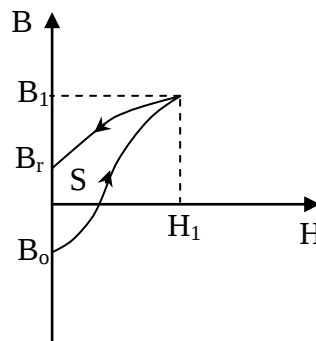
$$id\phi = niv dB = vH dB$$

L'équation (2) s'écrit donc :

$$\int_0^{t_1} e idt = \int_0^{t_1} Ri^2 dt + v \int_{B_0}^{B_1} H dB$$

Le premier terme de cette équation est l'énergie fournie par le générateur pendant le temps t_1 , le deuxième terme est l'énergie reçue par la résistance R (perdue par effet joule) et le troisième terme est l'énergie W_1 reçue par le barreau ferromagnétique.

Figure V-8



Si on diminue H de H_1 à zéro, le barreau restitue (fournie) l'énergie W_2 :

$$W_2 = \nu \int_{B_1}^{B_r} H dB < W_1$$

L'énergie perdue par hystérésis pendant la montée-descente est donc :

$$W_2 + W_1 = \nu S$$

où S est l'aire comprise entre les deux courbes (montée et descente).

Si on considère un cycle entier (une montée de $-H_1$ à H_1 suivie d'une descente de H_1 à $-H_1$), l'énergie W_c perdue par hystérésis (pendant ce cycle) est donc :

$$W_c = \nu S_c$$

où S_c est l'aire du cycle d'hystérésis.

VI. Les électroaimants et les circuits magnétiques:

VI. 1. Définitions et propriétés:

- Un électroaimant est un appareil constitué d'un noyau ferromagnétique dont une partie est recouverte par un bobinage d'un fil électrique. Le passage d'un courant électrique dans ce bobinage entraîne la création d'un champ magnétique dont l'intensité dépend de la forme géométrique et de la nature du noyau et de l'intensité du courant électrique.
- Si le noyau ferromagnétique a la forme d'un circuit alors ce dernier est appelé circuit magnétique. Ce circuit peut être fermé ou ouvert. Dans le cas d'un circuit magnétique ouvert, l'ouverture est appelée entrefer de l'électroaimant.
- Dans un circuit magnétique, les lignes de champ sont canalisées dans le noyau ferromagnétique qui constitue alors un tube de champ.

VI. 2. Notion de réluctance

Considérons un circuit magnétique dont le bobinage est parcouru par un courant d'intensité I .

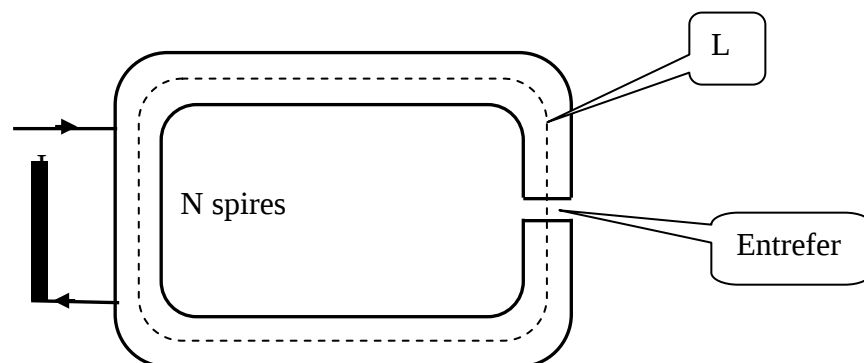


Figure V-9

Puisque le circuit constitue un tube de champ, le flux de $\vec{B}$ à travers la section du noyau ferromagnétique se conserve. Ce flux est donné par :

$$\phi = sB = s\mu H$$

où μ est la perméabilité magnétique du noyau ferromagnétique et s sa section.

D'autre part, l'application du théorème d'Ampère pour H , à la ligne moyenne L du tube de champ constitué par le noyau ferromagnétique, permet d'écrire :

$$\int_L \vec{H} d\vec{\ell} = \int_L \frac{B}{\mu} d\ell = \int_L \frac{\phi}{\mu s} d\ell = \phi \int_L \frac{d\ell}{\mu s} = NI$$

où N est le nombre de spires du bobinage du circuit magnétique.

Donc :

$$\phi = \frac{NI}{\int_L \frac{d\ell}{\mu s}} = \frac{E}{R} \quad (\text{Formule d'Hopkinson})$$

Soit :

$$E = NI = R\phi$$

où $R = \int_L \frac{d\ell}{\mu s}$ est appelé réluctance du noyau ferromagnétique et $E = NI$ est appelée force magnétomotrice (f.m.m.) du circuit magnétique.

Remarques :

- La relation $E = R\phi$ est analogue à la loi d'Ohm, dans un circuit électrique, en électrocinétique. D'où la ressemblance entre les circuits magnétiques et les circuits électriques.
- L'expression de la réluctance du noyau ferromagnétique est la même que celle de la résistance électrique d'un matériau sauf que la conductivité électrique du matériau est remplacée par la perméabilité magnétique.

VI. 3. Exemple :

Considérons l'exemple d'un circuit torique avec entrefer.

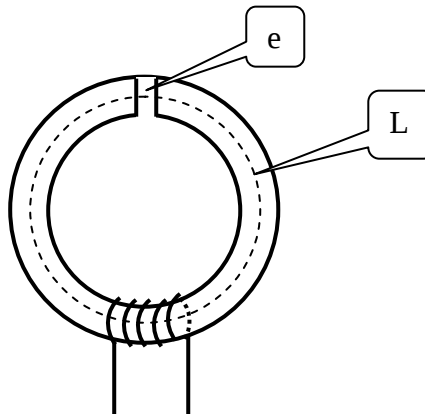


Figure V-10

La réluctance totale du circuit est donnée par :

$$R = \int_L \frac{d\ell}{\mu S} = \int_{L-e} \frac{d\ell}{\mu S} + \frac{e}{\mu_0 S} = \frac{L-e}{\mu S} + \frac{e}{\mu_0 S} = R_F + R_e$$

où R_F et R_e sont respectivement les réluctances du noyau ferromagnétique et de l'entrefer.

Ce résultat est analogue à celui de l'association de deux résistances électriques branchées en série en électrocinétique.